MV-Algebre e Algebre Prodotto

Tommaso Flaminio

Università di Siena

May 14, 2009

ℓ-GRUPPI ABELIANI

Sia $G = (G, +, -, \leq, 0)$ un ℓ-gruppo abeliano linearmente ordinato.

ℓ-GRUPPI ABELIANI

Sia $G = (G, +, -, \leq, 0)$ un ℓ-gruppo abeliano linearmente ordinato. Un elemento $u \in G$ è detto una *unità forte* per G se e soltanto se u soddisfa la seguente proprietà archimedea:

ℓ-GRUPPI ABELIANI

Sia $G = (G, +, -, \leq, 0)$ un ℓ-gruppo abeliano linearmente ordinato. Un elemento $u \in G$ è detto una *unità forte* per G se e soltanto se u soddisfa la seguente proprietà archimedea:

Per ogni $x \in G$, esiste $n \in \mathbb{N}$, tale che $x \leq nu$.

ℓ-GRUPPI ABELIANI

Sia $G = (G, +, -, \leq, 0)$ un ℓ-gruppo abeliano linearmente ordinato. Un elemento $u \in G$ è detto una *unità forte* per G se e soltanto se u soddisfa la seguente proprietà archimedea:

$$\text{Per ogni } x \in G, \text{ esiste } n \in \mathbb{N}, \text{ tale che } x \leq nu.$$

ESEMPIO: Sia $\Re = (\mathbb{R}, +, -, \leq, 0)$ il gruppo dei reali. Allora $\Re$ è un ℓ-gruppo abeliano linearmente ordinato e 1 'e una sua unit forte.

Conseguenze del teorema di Gurevich-Kokorin

Teorema (GK) Sia $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una formula senza quantificatori scritta nel linguaggio degli ℓ-gruppi. Se

$$\forall(x_1, \ldots, x_n)\varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

è vera in $\Re$, allora $\forall(x_1, \ldots, x_n)\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ è vera in ogni ℓ-gruppo.

Conseguenze del teorema di Gurevich-Kokorin

Teorema (GK) Sia $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una formula senza quantificatori scritta nel linguaggio degli ℓ-gruppi. Se

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

è vera in $\Re$, allora $\forall (x_1, \ldots, x_n) \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ è vera in ogni ℓ-gruppo.
Definizione Siano $A = (A, f_1, \ldots, f_k)$ e $B = (B, f_1, \ldots, f_k)$ due strutture dello stesso tipo. Diciamo che A si immerge parzialmente in B se per ogni sottoinsieme finito X di A esiste un sottoinsieme finito Y di B e una mappa $\lambda : X \to Y$ che $1-1$ e che preserva le operazioni esistenti in X. Ovvero:

Conseguenze del teorema di Gurevich-Kokorin

Teorema (GK) Sia $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una formula senza quantificatori scritta nel linguaggio degli ℓ-gruppi. Se

$$\forall(x_1, \dots, x_n)\varphi(x_1, \dots, x_n)$$

è vera in $\Re$, allora $\forall(x_1, \dots, x_n)\varphi(x_1, \dots, x_n)$ è vera in ogni ℓ-gruppo.

Definizione Siano $A = (A, f_1, \dots, f_k)$ e $B = (B, f_1, \dots, f_k)$ due strutture dello stesso tipo. Diciamo che A si immerge parzialmente in B se per ogni sottoinsieme finito X di A esiste un sottoinsieme finito Y di B e una mappa $\lambda : X \to Y$ che $1-1$ e che preserva le operazioni esistenti in X. Ovvero:

(1) λ è $1-1$

(2) Per ogni $x \in X$ tale che esistono $x_1, x_2, \dots, x_m$ in X e una f_j (m-aria) tale che $x = f_j(x_1, \dots, x_m)$, allora $\lambda(x) = f_j(\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m))$.

Corollario **(IMM-G)** Ogni ℓ-gruppo G si immerge parzialmente in $\Re$.

Corollario (IMM-G) Ogni ℓ-gruppo G si immerge parzialmente in $\Re$.
DIM: Sia $X = \{a_1, \ldots, a_m\}$ un sottoinsieme finito di G.

Corollario **(IMM-G)** Ogni ℓ-gruppo G si immerge parzialmente in $\Re$.
DIM: Sia $X = \{a_1, \ldots, a_m\}$ un sottoinsieme finito di G. Sia $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ la formula ottenuta come congiunzione delle seguenti clausole:

Corollario **(IMM-G)** Ogni ℓ-gruppo G si immerge parzialmente in $\Re$.
DIM: Sia $X = \{a_1, \ldots, a_m\}$ un sottoinsieme finito di G. Sia $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ la formula ottenuta come congiunzione delle seguenti clausole:

- $x_i = x_y + x_z$ (per ogni $i, y, z \in [m]$ $G \models a_i = a_y + a_z$)

Corollario (IMM-G) Ogni ℓ-gruppo G si immerge parzialmente in $\Re$.
DIM: Sia $X = \{a_1, \ldots, a_m\}$ un sottoinsieme finito di G. Sia $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ la formula ottenuta come congiunzione delle seguenti clausole:

- $x_i = x_y + x_z$ (per ogni $i, y, z \in [m]$ $G \models a_i = a_y + a_z$)
- $x_i \neq x_y + x_z$ (per ogni $i, y, z \in [m]$ $G \models a_i \neq a_y + a_z$)

Corollario (IMM-G) Ogni ℓ-gruppo G si immerge parzialmente in $\Re$.
DIM: Sia $X = \{a_1, \ldots, a_m\}$ un sottoinsieme finito di G. Sia $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ la formula ottenuta come congiunzione delle seguenti clausole:

- $x_i = x_y + x_z$ (per ogni $i, y, z \in [m]$ $G \models a_i = a_y + a_z$)
- $x_i \neq x_y + x_z$ (per ogni $i, y, z \in [m]$ $G \models a_i \neq a_y + a_z$)
- $x_i \leq x_j$ (per ogni $i, j \in [m]$ tale che $G \models a_i \leq a_j$)

Corollario (IMM-G) Ogni ℓ-gruppo G si immerge parzialmente in $\Re$.
DIM: Sia $X = \{a_1, \ldots, a_m\}$ un sottoinsieme finito di G. Sia $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ la formula ottenuta come congiunzione delle seguenti clausole:

- $x_i = x_y + x_z$ (per ogni $i, y, z \in [m]$ $G \models a_i = a_y + a_z$)
- $x_i \neq x_y + x_z$ (per ogni $i, y, z \in [m]$ $G \models a_i \neq a_y + a_z$)
- $x_i \leq x_j$ (per ogni $i, j \in [m]$ tale che $G \models a_i \leq a_j$)
- $x_i \not\leq x_j$ (per ogni $i, j \in [m]$ tale che $G \models a_i \not\leq a_j$)

Corollario (IMM-G) Ogni ℓ-gruppo G si immerge parzialmente in $\Re$.

DIM: Sia $X = \{a_1, \ldots, a_m\}$ un sottoinsieme finito di G. Sia $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ la formula ottenuta come congiunzione delle seguenti clausole:

- $x_i = x_y + x_z$ (per ogni $i, y, z \in [m]$ $G \models a_i = a_y + a_z$)
- $x_i \neq x_y + x_z$ (per ogni $i, y, z \in [m]$ $G \models a_i \neq a_y + a_z$)
- $x_i \leq x_j$ (per ogni $i, j \in [m]$ tale che $G \models a_i \leq a_j$)
- $x_i \not\leq x_j$ (per ogni $i, j \in [m]$ tale che $G \models a_i \not\leq a_j$)

Ne segue che la formula

$$(\exists x_1, \ldots, x_m)\varphi(x_1, \ldots, x_m) \tag{1}$$

è soddisfatta in G, di conseguenza la formula

$$(\forall x_1, \ldots, x_m)\neg\varphi(x_1, \ldots, x_m) \tag{2}$$

non è verificata in OGNI ℓ-gruppo (in particolare non vale in G).

Corollario (IMM-G) Ogni ℓ-gruppo G si immerge parzialmente in $\Re$.
DIM: Sia $X = \{a_1, \ldots, a_m\}$ un sottoinsieme finito di G. Sia $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ la formula ottenuta come congiunzione delle seguenti clausole:

- $x_i = x_y + x_z$ (per ogni $i, y, z \in [m]$ $G \models a_i = a_y + a_z$)
- $x_i \neq x_y + x_z$ (per ogni $i, y, z \in [m]$ $G \models a_i \neq a_y + a_z$)
- $x_i \leq x_j$ (per ogni $i, j \in [m]$ tale che $G \models a_i \leq a_j$)
- $x_i \not\leq x_j$ (per ogni $i, j \in [m]$ tale che $G \models a_i \not\leq a_j$)

Ne segue che la formula

$$(\exists x_1, \ldots, x_m)\varphi(x_1, \ldots, x_m) \tag{1}$$

è soddisfatta in G, di conseguenza la formula

$$(\forall x_1, \ldots, x_m)\neg\varphi(x_1, \ldots, x_m) \tag{2}$$

non è verificata in OGNI ℓ-gruppo (in particolare non vale in G).
Quindi, per il teorema GK, (2) non vale in $\Re$. Ovvero:

$$\exists b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R} \text{ tali che } \Re \models \varphi(b_1, \ldots, b_m)$$

$$\exists b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R} \text{ tali che } \Re \models \varphi(b_1, \ldots, b_m)$$

Chiamiamo $Y = b_1, \ldots, b_m$ e definiamo una mappa $\lambda : X \to Y$ come segue:

$$\lambda(a_i) = b_i.$$

Allora λ è $1 - 1$

$$\exists b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R} \text{ tali che } \Re \models \varphi(b_1, \ldots, b_m)$$

Chiamiamo $Y = b_1, \ldots, b_m$ e definiamo una mappa $\lambda : X \to Y$ come segue:

$$\lambda(a_i) = b_i.$$

Allora λ è $1 - 1$ (OVVIO)

$$\exists b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R} \text{ tali che } \Re \models \varphi(b_1, \ldots, b_m)$$

Chiamiamo $Y = b_1, \ldots, b_m$ e definiamo una mappa $\lambda : X \to Y$ come segue:

$$\lambda(a_i) = b_i.$$

Allora λ è $1 - 1$ (OVVIO) e preserva le operazioni in X

$$\exists b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R} \text{ tali che } \Re \models \varphi(b_1, \ldots, b_m)$$

Chiamiamo $Y = b_1, \ldots, b_m$ e definiamo una mappa $\lambda : X \to Y$ come segue:

$$\lambda(a_i) = b_i.$$

Allora λ è $1 - 1$ (OVVIO) e preserva le operazioni in X (ESERCIZIO).

$$\exists b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R} \text{ tali che } \Re \models \varphi(b_1, \ldots, b_m)$$

Chiamiamo $Y = b_1, \ldots, b_m$ e definiamo una mappa $\lambda : X \to Y$ come segue:

$$\lambda(a_i) = b_i.$$

Allora λ è $1 - 1$ (OVVIO) e preserva le operazioni in X (ESERCIZIO).

OSSERVAZIONE L'immersione parziale λ definita nella precedente dimostrazione rimane valida se al linguaggio degli ℓ-gruppi aggiungiamo delle operazioni addizionali che si definiscono con formule aperte e dalle operazioni di gruppo e ordine. Ovvero se esiste una formula aperta φ tali che

$$z = F(x_1, \ldots, x_n) \text{ si esprima come } \varphi(x_1, \ldots, x_n, z)$$

ℓ-gruppi abeliani e MV-algebre

Nel 1958 Chang dimostra che, se G è un ℓ-gruppo linearmente ordinato e u è una sua unità forte, allora la struttura

$$\Gamma(G, u) = ([0, u], \oplus, \neg, 0)$$

dove per ogni $x, y \in [0, u]$, $x \oplus y = (x + y) \wedge u$ e $\neg x = u - x$ è una MV-algebra linearmente ordinata.

ℓ-GRUPPI ABELIANI E MV-ALGEBRE

Nel 1958 Chang dimostra che, se G è un ℓ-gruppo linearmente ordinato e u è una sua unità forte, allora la struttura

$$\Gamma(G, u) = ([0, u], \oplus, \neg, 0)$$

dove per ogni $x, y \in [0, u]$, $x \oplus y = (x + y) \wedge u$ e $\neg x = u - x$ è una MV-algebra linearmente ordinata.

Nel 1986 Mundici dimostra l'altro verso della costruzione. Invertendo il Γ e definendo Γ^{-1} che associa ad ogni MV-algebra (l.o.) A, un ℓ-gruppo (l.o.) $\Gamma^{-1}(A)$, determina una equivalenza categoriale fra la categoria degli ℓ-gruppi con unità forte e la categoria delle MV-algebre.

ESEMPIO: Consideriamo l'ℓ-gruppo $\Re = (\mathbb{R}, +, -, \leq, 0)$.

ESEMPIO: Consideriamo l'ℓ-gruppo $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, -, \leq, 0)$.L'elemento 1 è una unità forte per $\mathfrak{R}$. Infatti $\mathbb{R}$ è archimedeo.

ESEMPIO: Consideriamo l'ℓ-gruppo $\Re = (\mathbb{R}, +, -, \leq, 0)$.L'elemento 1 è una unità forte per $\Re$. Infatti $\mathbb{R}$ è archimedeo.L'MV-algebra $\Gamma(\Re, 1)$ coincide con l'MV-algebra standard:

$$[0,1]_{MV} = ([0,1], \oplus, \neg, 0).$$

ESEMPIO: Consideriamo l'ℓ-gruppo $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, -, \leq, 0)$.L'elemento 1 è una unità forte per $\mathfrak{R}$. Infatti $\mathbb{R}$ è archimedeo.L'MV-algebra $\Gamma(\mathfrak{R}, 1)$ coincide con l'MV-algebra standard:

$$[0,1]_{MV} = ([0,1], \oplus, \neg, 0).$$

COROLLARIO **(IMM-MV)** Ogni MV-catena A si immerge parzialmente nell'MV-algebra standard.
DIM: (Sketch): Sia A una MV-catena data.

ESEMPIO: Consideriamo l'ℓ-gruppo $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, -, \leq, 0)$.L'elemento 1 è una unità forte per $\mathfrak{R}$. Infatti $\mathbb{R}$ è archimedeo.L'MV-algebra $\Gamma(\mathfrak{R}, 1)$ coincide con l'MV-algebra standard:

$$[0,1]_{MV} = ([0,1], \oplus, \neg, 0).$$

COROLLARIO (IMM-MV) Ogni MV-catena A si immerge parzialmente nell'MV-algebra standard.
DIM: (Sketch): Sia A una MV-catena data.
Sia G quell'ℓ-gruppo con unità forte u tale che $\Gamma(G, u) = A$.

ESEMPIO: Consideriamo l'ℓ-gruppo $\Re = (\mathbb{R}, +, -, \leq, 0)$.L'elemento 1 è una unità forte per $\Re$. Infatti $\mathbb{R}$ è archimedeo.L'MV-algebra $\Gamma(\Re, 1)$ coincide con l'MV-algebra standard:

$$[0,1]_{MV} = ([0,1], \oplus, \neg, 0).$$

COROLLARIO (IMM-MV) Ogni MV-catena A si immerge parzialmente nell'MV-algebra standard.
DIM: (Sketch): Sia A una MV-catena data.
Sia G quell'ℓ-gruppo con unità forte u tale che $\Gamma(G, u) = A$.
Per il Corollario $IMM - G$, G si immerge parzialmente nel gruppo linearmente ordinato $\Re$. Sia λ tale immersione.

ESEMPIO: Consideriamo l'ℓ-gruppo $\Re = (\mathbb{R}, +, -, \leq, 0)$.L'elemento 1 è una unità forte per $\Re$. Infatti $\mathbb{R}$ è archimedeo.L'MV-algebra $\Gamma(\Re, 1)$ coincide con l'MV-algebra standard:

$$[0,1]_{MV} = ([0,1], \oplus, \neg, 0).$$

COROLLARIO (IMM-MV) Ogni MV-catena A si immerge parzialmente nell'MV-algebra standard.

DIM: (Sketch): Sia A una MV-catena data.

Sia G quell'ℓ-gruppo con unità forte u tale che $\Gamma(G, u) = A$.

Per il Corollario $IMM - G$, G si immerge parzialmente nel gruppo linearmente ordinato $\Re$. Sia λ tale immersione.

Torniamo alle MV-algebre applicando il funtore Γ a $\Re$ e 1. Dal precedente esempio sappiamo che $\Gamma(\Re, 1) = [0,1]_{MV}$. Da cui la tesi segue facilmente.

Teorema (COMPL-MV) Sia φ una formula nel linguaggio della logica di Łukasiewicz. TFAE:

Teorema (COMPL-MV) Sia φ una formula nel linguaggio della logica di Łukasiewicz. TFAE:

(1) $\vdash_{\text{Ł}} \varphi$

(2) $\models_{[0,1]} \varphi$

Teorema **(COMPL-MV)** Sia φ una formula nel linguaggio della logica di Łukasiewicz. TFAE:

(1) $\vdash_{\text{Ł}} \varphi$

(2) $\models_{[0,1]} \varphi$

DIM: (1) $\rightarrow$ (2): soundness (Routine)

Completezza standard via immersioni parziali

Teorema (COMPL-MV) Sia φ una formula nel linguaggio della logica di Łukasiewicz. TFAE:

(1) $\vdash_{\text{Ł}} \varphi$

(2) $\models_{[0,1]} \varphi$

DIM: (1) $\rightarrow$ (2): soundness (Routine)

(2) $\rightarrow$ (1): Supponiamo che $\nvdash_{\text{Ł}} \varphi$. Allora, dato che la logica di Łukasiewicz è completa rispetto a catene, esiste una MV-algebra linearmente ordinata A e una valutazione V in A tale che $V(\varphi) < 1$.

Completezza standard via immersioni parziali

Teorema (COMPL-MV) Sia φ una formula nel linguaggio della logica di Łukasiewicz. TFAE:

(1) $\vdash_{\text{Ł}} \varphi$

(2) $\models_{[0,1]} \varphi$

DIM: (1) $\rightarrow$ (2): soundness (Routine)

(2) $\rightarrow$ (1): Supponiamo che $\not\vdash_{\text{Ł}} \varphi$. Allora, dato che la logica di Łukasiewicz è completa rispetto a catene, esiste una MV-algebra linearmente ordinata A e una valutazione V in A tale che $V(\varphi) < 1$.

Sia X l'insieme di tutte le valutazioni, sotto V, delle sottoformule di φ, più lo 0 e 1:

$$X = \{V(\psi) : \psi \text{ è sottoformula di } \varphi\} \cup \{0, 1\}.$$

Ora utilizziamo il COROLLARIO (IMM-MV) e sia $\lambda : A \to [0,1]_{MV}$ e $Y \subset [0,1]$ tale che

(-) $\lambda : X \mapsto Y$ è $1-1$

(-) λ preserva le operazioni di X.

In particolare, il fatto che λ è una immersione parziale assicura che esista una valutazione $V' : Var \to [0,1]$, tale che $V'(\psi) = \lambda(\psi)$ per ogni ψ sottoformula di φ. In definitiva $V'(\varphi) < 1$.

Ora utilizziamo il COROLLARIO (IMM-MV) e sia $\lambda : A \to [0, 1]_{MV}$ e $Y \subset [0, 1]$ tale che

(-) $\lambda : X \mapsto Y$ è $1 - 1$

(-) λ preserva le operazioni di X.

In particolare, il fatto che λ è una immersione parziale assicura che esista una valutazione $V' : Var \to [0, 1]$, tale che $V'(\psi) = \lambda(\psi)$ per ogni ψ sottoformula di φ. In definitiva $V'(\varphi) < 1$.
Quindi $\not\models_{[0,1]} \varphi$.

Ora utilizziamo il COROLLARIO (IMM-MV) e sia $\lambda : A \to [0,1]_{MV}$ e $Y \subset [0,1]$ tale che

- (-) $\lambda : X \mapsto Y$ è $1-1$
- (-) λ preserva le operazioni di X.

In particolare, il fatto che λ è una immersione parziale assicura che esista una valutazione $V' : Var \to [0,1]$, tale che $V'(\psi) = \lambda(\psi)$ per ogni ψ sottoformula di φ. In definitiva $V'(\varphi) < 1$.
Quindi $\not\models_{[0,1]} \varphi$.

OSSERVAZIONE: La precedente dimostrazione può essere facilmente estesa al caso della completezza finita standard (Finite Strong Standard Completeness).

Ora utilizziamo il COROLLARIO (IMM-MV) e sia $\lambda : A \to [0,1]_{MV}$ e $Y \subset [0,1]$ tale che

(-) $\lambda : X \mapsto Y$ è $1-1$

(-) λ preserva le operazioni di X.

In particolare, il fatto che λ è una immersione parziale assicura che esista una valutazione $V' : Var \to [0,1]$, tale che $V'(\psi) = \lambda(\psi)$ per ogni ψ sottoformula di φ. In definitiva $V'(\varphi) < 1$.
Quindi $\not\models_{[0,1]} \varphi$.

OSSERVAZIONE: La precedente dimostrazione può essere facilmente estesa al caso della completezza finita standard (Finite Strong Standard Completeness).
L'unica modifica riguarda la definizione dell'insieme X che, pur rimanendo finito, dovrà contenere le sottoformule di ogni formula da cui si dimostra φ.

Ora utilizziamo il COROLLARIO (IMM-MV) e sia $\lambda : A \to [0,1]_{MV}$ e $Y \subset [0,1]$ tale che

- (-) $\lambda : X \mapsto Y$ è $1-1$
- (-) λ preserva le operazioni di X.

In particolare, il fatto che λ è una immersione parziale assicura che esista una valutazione $V' : Var \to [0,1]$, tale che $V'(\psi) = \lambda(\psi)$ per ogni ψ sottoformula di φ. In definitiva $V'(\varphi) < 1$.
Quindi $\not\models_{[0,1]} \varphi$.

OSSERVAZIONE: La precedente dimostrazione può essere facilmente estesa al caso della completezza finita standard (Finite Strong Standard Completeness).
L'unica modifica riguarda la definizione dell'insieme X che, pur rimanendo finito, dovrà contenere le sottoformule di ogni formula da cui si dimostra φ.
La precedente dimostrazione NON si può applicare al caso di teorie infinite. D'altra parte la logiuca di Łukasiewicz gode della completezza forte iperreale (Strong Non-Standard Completeness).

Ancora su algebre iperreali

(1) La FSSC implica la SNSC

Ancora su algebre iperreali

(1) La FSSC implica la SNSC

(2) Teorema di "Di Nola":

Ancora su algebre iperreali

(1) La FSSC implica la SNSC

(2) Teorema di “Di Nola”:

(2.1) Ogni MV-algebra A si rappresenta come un prodotto sottodiretto di MV-algebre linearmente ordinate.

Ancora su algebre iperreali

(1) La FSSC implica la SNSC

(2) Teorema di "Di Nola":

(2.1) Ogni MV-algebra A si rappresenta come un prodotto sottodiretto di MV-algebre linearmente ordinate. Un filtro F di A è PRIMO (cioè per ogni $x, y \in A$, $x \to y \in F$ oppure $y \to x \in F$) se e soltanto se l'algebra quoziente A/F è una catena.

Ancora su algebre iperreali

(1) La FSSC implica la SNSC

(2) Teorema di "Di Nola":

(2.1) Ogni MV-algebra A si rappresenta come un prodotto sottodiretto di MV-algebre linearmente ordinate. Un filtro F di A è PRIMO (cioè per ogni $x, y \in A$, $x \to y \in F$ oppure $y \to x \in F$) se e soltanto se l'algebra quoziente A/F è una catena. Quindi ogni MV-algebra A si immerge nel prodotto diretto $\prod\{A/F : F \in Spec(A)\}$.

Ancora su algebre iperreali

(1) La FSSC implica la SNSC

(2) Teorema di "Di Nola":

(2.1) Ogni MV-algebra A si rappresenta come un prodotto sottodiretto di MV-algebre linearmente ordinate. Un filtro F di A è PRIMO (cioè per ogni $x, y \in A$, $x \rightarrow y \in F$ oppure $y \rightarrow x \in F$) se e soltanto se l'algebra quoziente A/F è una catena. Quindi ogni MV-algebra A si immerge nel prodotto diretto $\prod\{A/F : F \in Spec(A)\}$.
(2.2) Sia G_F un gruppo abeliano totalmente ordinato con unità forte u_F tale che $A/F = \Gamma(G_F, u_F)$

Ancora su algebre iperreali

(1) La FSSC implica la SNSC

(2) Teorema di “Di Nola”:

(2.1) Ogni MV-algebra A si rappresenta come un prodotto sottodiretto di MV-algebre linearmente ordinate. Un filtro F di A è PRIMO (cioè per ogni $x, y \in A$, $x \to y \in F$ oppure $y \to x \in F$) se e soltanto se l'algebra quoziente A/F è una catena. Quindi ogni MV-algebra A si immerge nel prodotto diretto $\prod\{A/F : F \in Spec(A)\}$.
(2.2) Sia G_F un gruppo abeliano totalmente ordinato con unità forte u_F tale che $A/F = \Gamma(G_F, u_F)$
(2.3) G_F si può immergere in un gruppo abeliano divisibile l.o. K_F con la stessa unità forte u_F

Ancora su algebre iperreali

(1) La FSSC implica la SNSC

(2) Teorema di "Di Nola":

(2.1) Ogni MV-algebra A si rappresenta come un prodotto sottodiretto di MV-algebre linearmente ordinate. Un filtro F di A è PRIMO (cioè per ogni $x, y \in A$, $x \to y \in F$ oppure $y \to x \in F$) se e soltanto se l'algebra quoziente A/F è una catena. Quindi ogni MV-algebra A si immerge nel prodotto diretto $\prod\{A/F : F \in Spec(A)\}$.
(2.2) Sia G_F un gruppo abeliano totalmente ordinato con unità forte u_F tale che $A/F = \Gamma(G_F, u_F)$
(2.3) G_F si può immergere in un gruppo abeliano divisibile l.o. K_F con la stessa unità forte u_F
(2.4) Ogni gruppo abeliano l.o e divisible è elementarmente equivalente al gruppo dei reali $\Re$. Quindi l'algebra $B_F = \Gamma(K_F, u_F)$ è elementarmente equivalente all'algebra standard $[0, 1]_{MV}$.

(2.5) Ricordiamo il Teorema di Frayne: Due strutture al primo ordine che sono elementarmente equivalenti hanno ultrapotenze isomorfe.

(2.5) Ricordiamo il Teorema di Frayne: Due strutture al primo ordine che sono elementarmente equivalenti hanno ultrapotenze isomorfe. Se A e B sono elementarmente equivalenti allora A si immerge in una ultrapotenza di B.

(2.5) Ricordiamo il Teorema di Frayne: Due strutture al primo ordine che sono elementarmente equivalenti hanno ultrapotenze isomorfe. Se A e B sono elementarmente equivalenti allora A si immerge in una ultrapotenza di B. B_F si immerge in una ultrapotenza $[0,1]^*_F$ di $[0,1]_{MV}$.

(2.5) Ricordiamo il Teorema di Frayne: Due strutture al primo ordine che sono elementarmente equivalenti hanno ultrapotenze isomorfe. Se A e B sono elementarmente equivalenti allora A si immerge in una ultrapotenza di B. B_F si immerge in una ultrapotenza $[0,1]^*_F$ di $[0,1]_{MV}$.
(2.6) Per la Joint Embedding Property: Una classe $\mathbb{C}$ di strutture al primo ordine soddisfa la JEP se per ogni coppia di strutture A e B in $\mathbb{C}$ esiste una struttura $D \in \mathbb{C}$ tale che A e B si immergono in D.

(2.5) Ricordiamo il Teorema di Frayne: Due strutture al primo ordine che sono elementarmente equivalenti hanno ultrapotenze isomorfe. Se A e B sono elementarmente equivalenti allora A si immerge in una ultrapotenza di B. B_F si immerge in una ultrapotenza $[0,1]_F^*$ di $[0,1]_{MV}$.
(2.6) Per la Joint Embedding Property: Una classe $\mathbb{C}$ di strutture al primo ordine soddisfa la JEP se per ogni coppia di strutture A e B in $\mathbb{C}$ esiste una struttura $D \in \mathbb{C}$ tale che A e B si immergono in D. Esiste una ultrapotenza $[0,1]_{MV}^*$ di $[0,1]_{MV}$ tale che, per ogni filtro primo F di A, $[0,1]_F^*$ si immerge in $[0,1]_{MV}^*$.

(2.5) Ricordiamo il Teorema di Frayne: Due strutture al primo ordine che sono elementarmente equivalenti hanno ultrapotenze isomorfe. Se A e B sono elementarmente equivalenti allora A si immerge in una ultrapotenza di B. B_F si immerge in una ultrapotenza $[0,1]^*_F$ di $[0,1]_{MV}$.
(2.6) Per la Joint Embedding Property: Una classe $\mathbb{C}$ di strutture al primo ordine soddisfa la JEP se per ogni coppia di strutture A e B in $\mathbb{C}$ esiste una struttura $D \in \mathbb{C}$ tale che A e B si immergono in D. Esiste una ultrapotenza $[0,1]^*_{MV}$ di $[0,1]_{MV}$ tale che, per ogni filtro primo F di A, $[0,1]^*_F$ si immerge in $[0,1]^*_{MV}$.
Ogni lemento a di A si rappresenta coma una funzione $f_a : Spec(A) \to [0,1]^*$ e associa:

$$f_a(F) = \lambda(a/F) \in [0,1]^*_{MV}$$

dove λ è l'immersione di A/F in $[0,1]^*_{MV}$.

Logica del prodotto e algebre prodotto

La logica del prodotto (Π in simbolo) è stata introdotta da Petr Hájek, Lluìs Godo e Francesc Esteva con l'intento di catturare tutte le tautologie delle algebre su $[0, 1]$ in cui l'operazione & è l'usuale prodotto fra reali.

Logica del prodotto e algebre prodotto

La logica del prodotto (Π in simbolo) è stata introdotta da Petr Hájek, Lluìs Godo e Francesc Esteva con l'intento di catturare tutte le tautologie delle algebre su $[0,1]$ in cui l'operazione $\&$ è l'usuale prodotto fra reali.

Il linguaggio di Π è composto da un insieme numerabile di variabili proposizionali $\{p_1, p_2, \ldots\}$, connettivi binari $\&$ e $\rightarrow$, la costante $\perp$. Il seguente è un sistema assiomatico per Π:

(B1) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

(B2) $\varphi \& \psi \rightarrow \psi$

(B3) $\varphi \& \psi \rightarrow \psi \& \varphi$

(B4) $\varphi \& (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi \& (\psi \rightarrow \varphi)$

(B5a) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \& \psi \rightarrow \chi)$

(B5b) $(\varphi \& \psi \rightarrow \chi) \rightarrow \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$

(B6) $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \chi) \rightarrow \chi)$

(B7) $\perp \rightarrow \varphi$

(B8) $\varphi \wedge \neg\varphi \rightarrow \perp$

(B9) $\neg\neg\chi \rightarrow ((\varphi \& \chi \rightarrow \psi \& \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$

L'unica regola di inferenza è Modus Ponens: da φ e $\varphi \to \psi$, deduci ψ.

L'unica regola di inferenza è Modus Ponens: da φ e $\varphi \to \psi$, deduci ψ.
Un'algebra $A = (A, \&, \to \wedge, \vee, 1, 0)$ è un'algebra prodotto se:

- $(A, \&, 1)$ è un moniode commutativo
- $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ è un reticolo limitato
- $\to$ è il residuo di $\&$
$$x \& z \leq y \text{ sse } z \leq x \to y.$$
- $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$
- $x \wedge \neg x = 0$
- $\neg\neg z \leq ((x \& z \to y \& z) \to (x \to y))$

L'unica regola di inferenza è Modus Ponens: da φ e $\varphi \to \psi$, deduci ψ.
Un'algebra $A = (A, \&, \to \wedge, \vee, 1, 0)$ è un'algebra prodotto se:

- $(A, \&, 1)$ è un moniode commutativo
- $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ è un reticolo limitato
- $\to$ è il residuo di $\&$
$$x \& z \leq y \text{ sse } z \leq x \to y.$$
- $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$
- $x \wedge \neg x = 0$
- $\neg\neg z \leq ((x \& z \to y \& z) \to (x \to y))$

La classe delle algebre prodotto costituisce una varietà che denotiamo con $\mathbb{P}$.

L'unica regola di inferenza è Modus Ponens: da φ e $\varphi \to \psi$, deduci ψ.
Un'algebra $A = (A, \&, \to \wedge, \vee, 1, 0)$ è un'algebra prodotto se:

- $(A, \&, 1)$ è un moniode commutativo
- $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ è un reticolo limitato
- $\to$ è il residuo di $\&$
$$x\&z \leq y \text{ sse } z \leq x \to y.$$
- $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$
- $x \wedge \neg x = 0$
- $\neg\neg z \leq ((x\&z \to y\&z) \to (x \to y))$

La classe delle algebre prodotto costituisce una varietà che denotiamo con $\mathbb{P}$.
Come per le MV-algebre, un'algebra prodotto linearmente ordinata verrà chiamata una P-catena.

Il tipico esempio di algebra prodotto è:

$$[0, 1]_P = ([0, 1], \&, \rightarrow, \max, \min, 0, 1)$$

dove per ogni $x, y \in [0, 1]$:

Il tipico esempio di algebra prodotto è:

$$[0,1]_P = ([0,1], \&, \rightarrow, \max, \min, 0, 1)$$

dove per ogni $x, y \in [0,1]$:

$$x\&y = xy \text{ (usuale prodotto fra reali)}$$

Il tipico esempio di algebra prodotto è:

$$[0,1]_P = ([0,1], \&, \rightarrow, \max, \min, 0, 1)$$

dove per ogni $x, y \in [0,1]$:

$$x \& y = xy \text{ (usuale prodotto fra reali)}$$

$$x \rightarrow y = \begin{cases} y/x & \text{se } y < x \\ 1 & \text{se } x \leq y \end{cases}$$

Il tipico esempio di algebra prodotto è:

$$[0,1]_P = ([0,1], \&, \to, \max, \min, 0, 1)$$

dove per ogni $x, y \in [0,1]$:

$$x \& y = xy \text{ (usuale prodotto fra reali)}$$

$$x \to y = \begin{cases} y/x & \text{se } y < x \\ 1 & \text{se } x \leq y \end{cases}$$

$[0,1]_P$ è chiamata l'algebra prodotto standard.
Notare che, a differenza del caso della MV-algebra standard, l'algebra prodotto standard ha un'operazione non continua ($\to$).

I seguenti risultati si dimostrano esattamente come nel caso delle MV-algebre:

I seguenti risultati si dimostrano esattamente come nel caso delle MV-algebre:

(1) Per ogni insieme di formule $\Gamma \cup \{\varphi\}$, $\Gamma \vdash_{\Pi} \varphi$ iff $\Gamma \models_{\mathbb{P}} \varphi$

I seguenti risultati si dimostrano esattamente come nel caso delle MV-algebre:

(1) Per ogni insieme di formule $\Gamma \cup \{\varphi\}$, $\Gamma \vdash_{\Pi} \varphi$ iff $\Gamma \models_{\mathbb{P}} \varphi$

(2) Ogni algebra prodotto A si rappresenta come prodotto sottodiretto di catene prodotto.

I seguenti risultati si dimostrano esattamente come nel caso delle MV-algebre:

(1) Per ogni insieme di formule $\Gamma \cup \{\varphi\}$, $\Gamma \vdash_{\Pi} \varphi$ iff $\Gamma \models_{\mathbb{P}} \varphi$

(2) Ogni algebra prodotto A si rappresenta come prodotto sottodiretto di catene prodotto.

(3) Per ogni insieme di formule $\Gamma \cup \{\varphi\}$, $\Gamma \vdash_{\Pi} \varphi$ iff $\Gamma \models_{\Pi\text{-chains}} \varphi$.

ℓ-GRUPPI ABELIANI E ALGEBRE PRODOTTO, VERSO LA COMPLETEZZA STANDARD

Come per le MV-algebre, esiste una stretta relazione fra catene prodotto e gruppi abeliani linearmente ordinati:

ℓ-gruppi abeliani e algebre prodotto, verso la completezza standard

Come per le MV-algebre, esiste una stretta relazione fra catene prodotto e gruppi abeliani linearmente ordinati:

Teorema (Prod-G) Sia $A = (A, \& \rightarrow, \wedge, \vee, 0, 1)$ una catena prodotto. Allora esiste un gruppo abeliano linearmente ordinato $G = (G, +.-, \leq, 0)$ tale che

- $A \setminus \{0\} = Neg_G = \{g \in G : g \leq 0\}$ e
  - $0_G = 1_A$
  - $g +_G h = g\&h$
  - $g \leq_G h$ sse $g \leq_A h$
- Se $g \geq h$, allora $g \rightarrow h = h -_G g$.

Definizione Per ogni gruppo abeliano linearmente ordinato G sia $\Pi(G)$ l'algebra $A = (A, \& \rightarrow, \wedge, \vee, 0, 1)$ dove $A = Neg_G \cup \{-\infty\}$, dove $-\infty$ è un nuovo elemento tale che:

- $x\&y = x +_G y$
- $(-\infty)\&x = x\&(-\infty) = -\infty$ (per ogni $x \in A$)
- $x \rightarrow y = 1$ per ogni $x \leq y$ e $x, y \in A$
- $x \rightarrow y = y -_G x$ per $x > y$ e $x, y \in A \setminus \{-\infty\}$
- $x \rightarrow -\infty = -\infty$ per $x > -\infty$
- $x \wedge y = \min(x, y)$ e $x \vee y = \max(x, y)$
- $0_A = -\infty$, $1_A = 0_G$

Definizione Per ogni gruppo abeliano linearmente ordinato G sia $\Pi(G)$ l'algebra $A = (A, \& \to, \wedge, \vee, 0, 1)$ dove $A = Neg_G \cup \{-\infty\}$, dove $-\infty$ è un nuovo elemento tale che:

- $x \& y = x +_G y$
- $(-\infty)\&x = x\&(-\infty) = -\infty$ (per ogni $x \in A$)
- $x \to y = 1$ per ogni $x \leq y$ e $x, y \in A$
- $x \to y = y -_G x$ per $x > y$ e $x, y \in A \setminus \{-\infty\}$
- $x \to -\infty = -\infty$ per $x > -\infty$
- $x \wedge y = \min(x, y)$ e $x \vee y = \max(x, y)$
- $0_A = -\infty$, $1_A = 0_G$

Teorema Sia G un gruppo abeliano linearmente ordinato. Allora $\Pi(G)$ è un'algebra prodotto linearmente ordinata il cui gruppo corrispondente è esattamente G.

Corollario 1: Ogni catena prodotto A si immerge parzialmente nella catena standard $[0, 1]_P$

Corollario 1: Ogni catena prodotto A si immerge parzialmente nella catena standard $[0,1]_P$

Corollario 2: Sia $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un insieme finito di formule nel linguaggio della logica prodotto, allora $\Gamma \vdash_\Pi \varphi$ sse $\Gamma \models_{[0,1]_P} \varphi$.

Corollario 1: Ogni catena prodotto A si immerge parzialmente nella catena standard $[0,1]_P$

Corollario 2: Sia $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un insieme finito di formule nel linguaggio della logica prodotto, allora $\Gamma \vdash_{\Pi} \varphi$ sse $\Gamma \models_{[0,1]_P} \varphi$.

Corollario 3: Il precedente risultato non si applica al caso in cui Γ sia infinito.

Corollario 1: Ogni catena prodotto A si immerge parzialmente nella catena standard $[0,1]_P$

Corollario 2: Sia $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un insieme finito di formule nel linguaggio della logica prodotto, allora $\Gamma \vdash_{\Pi} \varphi$ sse $\Gamma \models_{[0,1]_P} \varphi$.

Corollario 3: Il precedente risultato non si applica al caso in cui Γ sia infinito. La logica prodotto gode della completezza forte iperreale.