

T-NORME CONTINUE E BL-ALGEBRE

Tommaso Flaminio

Università di Siena

May 20, 2009

- 1 BREVE RIEPILOGO
- 2 T-NORME (CONTINUE)
- 3 SOMME ORDINALI DI T-NORME CONTINUE
- 4 LA LOGICA BL E BL-ALGEBRE
- 5 COMPLETEZZA STANDARD PER BL

...RICAPITOLANDO

Linguaggio: insieme numerabile di variabili proposizionali $\{p_1, p_2, \dots\}$,
simboli per connettivi: $\&, \rightarrow, \wedge, \bar{0}$ (tipo $(2, 2, 2, 0)$).

- La logica di Gödel è la logica che cattura le tautologie dell'algebra di Gödel standard:

$$[0, 1]_G = ([0, 1], \wedge, \vee, \rightarrow, \bar{0}, \bar{1}).$$

Dove, per ogni $x, y \in [0, 1]$, $x \wedge y = \min\{x, y\}$, $x \vee y = \max\{x, y\}$,
 $x \rightarrow y = 1$ se $x \leq y$ oppure y .

- La Logica di Łukasiewicz è la logica che cattura le tautologie della MV-algebra standard:

$$[0, 1]_{MV} = ([0, 1], \&, \rightarrow, \wedge, \vee, \bar{0}, \bar{1}).$$

Dove, per ogni $x, y \in [0, 1]$, $x \& y = \max\{0, x + y - 1\}$,
 $x \rightarrow y = \min\{1, 1 - x + y\}$, \wedge e \vee come in $[0, 1]_G$.

- La Logica di prodotto è la logica che cattura le tautologie della Π -algebra standard:

$$[0, 1]_{\Pi} = ([0, 1], \&, \rightarrow, \wedge, \vee, \bar{0}, \bar{1}).$$

Dove, per ogni $x, y \in [0, 1]$, $x \& y = xy$, $x \rightarrow y = 1$ se $x \leq y$, oppure y/x . \wedge e \vee come in $[0, 1]_G$.

- La logica di Gödel è caratterizzata dall'interpretazione di $x \& y$ come $\min\{x, y\}$
- La logica di Łukaseiwicz è caratterizzata dall'interpretazione di $x \& y$ come $\max\{0, x + y - 1\}$
- La logica di prodotto è caratterizzata dall'interpretazione di $x \& y$ come xy

Queste tre funzioni ($*$) hanno in comune le seguenti proprietà:

- $* : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$
- $*$ ristretta alla catena $\{0, 1\}$ coincide con l'interpretazione della congiunzione classica
- $*$ è commutativa e associativa
- $x * 0 = 0$ e $x * 1 = x$
- $*$ è monotona crescente in entrambi gli argomenti
- $*$ è continua

DEFINITION

Una funzione $* : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ è una **t-norma** se:

- $*$ è commutativa e associativa:

$$x * y = y * x \text{ e } x * (y * z) = (x * y) * z.$$

- $*$ è non-decrescente in entrambi gli argomenti:

$$\text{Se } y_1 \leq y_2, \text{ allora } x * y_1 \leq x * y_2.$$

- $1 * x = x$ e $0 * x = 0$.

Una t-norma $*$ è detta *continua* se $*$ è continua come funzione.

D'ora in avanti chiameremo le precedenti, rispettivamente:

La t-norma del minimo (o la t-norma di Gödel)

La t-norma di Łukasiewicz

La t-norma del prodotto

IL TEOREMA DI SOMMA ORDINALE

Le precedenti t-norme (Gödel, Łukasiewicz, e prodotto) sono le **tre t-norme continue fondamentali**, nel senso che, come vedremo a breve, ogni t-norma continua $*$ si ottiene come combinazione delle tre precedenti.

Struttura che intendiamo analizzare è il semigruppato commutativo e ordinato $([0, 1], *, \leq)$ dove $*$ è una t-norma continua.

Ricordiamo che un elemento $x \in [0, 1]$ è detto:

- **idempotente** (relativamente a $*$) se $x * x = x$.
- **nilpotente** (relativamente a $*$) se esiste un $n \in \mathbb{N}$, tale che $0 = x^n = x * \dots * x$ (n -volte).

ESEMPIO: Se $*$ è la t-norma di Gödel, allora ogni elemento $x \in [0, 1]$ è idempotente. 0 e 1 sono idempotenti per ogni $*$. Per ogni $*$, 0 è un nilpotente.

DEFINITION

Una t-norma continua è detta:

- **Archimedeo** se, oltre allo 0 e 1, non ha altri idempotenti,
- **Stretta** se è Archimedeo e non ha altri nilpotenti eccetto allo 0,
- **Nilpotente** se è Archimedeo, ma non stretta

Per ogni t-norma continua $*$, l'insieme E degli elementi idempotenti di $*$ è un sottoinsieme chiuso di $[0, 1]$, e quindi il suo complemento è l'unione contabile di un insieme $I_{open}(E)$ di intervalli aperti, e disgiunti.

Sia $[a, b] \in I(E)$ sse $(a, b) \in I_{open}(E)$. Per ogni $I \in I(E)$ indichiamo con $*|I$ la restrizione di $*$ all'intervallo chiuso I .

THEOREM

Siano $*$, E e $I(E)$ come sopra. Allora:

- Per ogni $I \in I(E)$, $*$ | I è isomorfa alla t -norma prodotto, o alla t -norma di Łukasiewicz
- Se $x, y \in [0, 1]$, e non esiste alcun $I \in I(E)$ tale che $x, y \in I$, allora $x * y = \min(x, y)$.

PROOF.

Per ogni $I \in I(E)$ la mappa f che manda $I = [a, b]$ in $[0, 1]$ rende la restrizione di $*$ a I una t -norma continua e Archimedeana: se $a < x < b$ allora $a * x = a$ e $b * x = x$.^a Se $x < y$ e x e y non appartengono allo stesso intervallo I , allora esiste un idempotente a tale che $x \leq a \leq y$, ne segue che $x * y = x$.^b

Rimane da mostrare che ogni t -norma continua Archimedeana e stretta è isomorfa alla t -norma prodotto e che ogni t -norma continua, Archimedeana e nilpotente è isomorfa alla t -norma di Łukasiewicz. \square

^a Infatti, se $x \leq y$, allora $x = y * (y \rightarrow x)$ (si veda [Lemma 2.1.7, Haj98])

^b Infatti, se $a \leq u \leq b$ e u è un idempotente, allora $a * b = a$ (si veda [Lemma 2.1.7, Haj98])

LEMMA

- (1) Se $*$ è stretta, allora $([0, 1], *, \leq)$ è isomorfo a $([0, 1], \cdot, \leq)$, dove \cdot indica la t -norma prodotto.
- (2) Se $*$ è nilpotente allora $([0, 1], *, \leq)$ è isomorfo a $([1/4, 1], \hat{*}, \leq)$, dove $x \hat{*} y = \max(1/4, x \cdot y)$ (prodotto troncato ad $1/4$)
- (3) Il semigruppò $([1/4, 1], \hat{*}, \leq)$ è isomorfo a $([0, 1], *_L, \leq)$, dove $*_L$ indica la t -norma di Łukasiewicz.

CALCOLO $PC(*)$

Sia $*$ una t-norma continua fissata. Consideriamo il linguaggio $\mathcal{L} = \{Var = \{p_1, p_2, \dots\}, \&, \rightarrow, \wedge, \bar{0}\}$. L'interpretazione intesa delle formule in \mathcal{L} modulo $*$ è la seguente:

- $*$ è la funzione di verità per il connettivo di *congiunzione forte* $\&$.
- Il residuo \Rightarrow_* di $*$ è la funzione di verità per il connettivo di *implicazione* \rightarrow .
- L'operazione di minimo \min è la funzione di verità per il connettivo di *congiunzione debole* \wedge .

In $PC(*)$ possiamo definire ulteriori connettivi come segue:

$$\begin{aligned}\neg\varphi &= \varphi \rightarrow \bar{0}, \\ \varphi \vee \psi &= ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \wedge ((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi), \\ \varphi \leftrightarrow \psi &= (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi), \\ [\varphi \wedge \psi &= \varphi \&(\varphi \rightarrow \psi)]\end{aligned}$$

Abbiamo visto che una t-norma continua $*$ è una buona scelta per interpretare il connettivo di congiunzione (forte), infatti $*$ è commutativa, generalizza la congiunzione classica, è associativa, etc...

Inoltre $*$ (quando è continua) consente di definire l'operatore di residuo:

$$x \Rightarrow_* y = \sup\{z \in [0, 1] \mid x * z \leq y\}.$$

DOMANDA: La scelta di \Rightarrow_* è una buona scelta come funzione di verità di una implicazione? Quale che sia la t-norma $*$:

- $0 \Rightarrow_* 0 = 0 \Rightarrow_* 1 = 1 \Rightarrow_* 1 = 1$ e $1 \Rightarrow_* 0 = 0$. Quindi \Rightarrow_* generalizza l'(a funzione di verità dell')implicazione classica.
- La funzione $(x, y) \mapsto x \Rightarrow_* y$ è non crescente in x e non decrescente in y .
- \Rightarrow_* soddisfa la regola di **fuzzy modus-ponens**: da un (limite inferiore) del valore di verità x di φ e da un (limite inferiore) del valore di verità $z = x \Rightarrow_* y$ di $\varphi \rightarrow \psi$ dobbiamo saper calcolare un lower bound per il valore di verità y di ψ .

Se prendiamo \Rightarrow_* per calcolare il valore di $\varphi \rightarrow \psi$ allora abbiamo che:

$$\text{SE } a \leq x \text{ E } b \leq x \Rightarrow_* y, \text{ ALLORA } a * b \leq y.$$

LA LOGICA BL E BL-ALGEBRE

Consideriamo il linguaggio $\mathcal{L} = \{Var = \{p_1, p_2, \dots\}, \&, \rightarrow, \wedge, \bar{0}\}$.
I seguenti sono gli assiomi di BL (si veda [Haj98]).

$$(B1) \quad (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(B2) \quad \varphi \& \psi \rightarrow \psi$$

$$(B3) \quad \varphi \& \psi \rightarrow \psi \& \varphi$$

$$(B4) \quad \varphi \& (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi \& (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(B5A) \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \& \psi \rightarrow \chi)$$

$$(B5B) \quad (\varphi \& \psi \rightarrow \chi) \rightarrow \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$$

$$(B6) \quad ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \chi) \rightarrow \chi)$$

$$(B7) \quad \bar{0} \rightarrow \varphi$$

Nota: confrontare questo sistema di assiomi con quello che abbiamo dato per G , quello di \mathbb{L} , e quello per Π .

QUALCHE PROPRIETÀ

- $\vdash_{BL} (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$.
- $T \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \text{Form}(\mathcal{L})$. $T \cup \{\varphi\} \vdash_{BL} \psi$ sse $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c.
 $T \vdash_{BL} \varphi^n \rightarrow \psi$.
- $(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$
- $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$

BL-ALGEGRE

Una struttura $A = (A, \&, \rightarrow, \wedge, \vee, \bar{0}, \bar{1})$ (di tipo $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$) è una BL-algebra se

- $(A, \wedge, \vee, \bar{0}, \bar{1})$ è un reticolo limitato, con top $\bar{1}$ e bottom $\bar{0}$.
- $(A, \&, 1)$ è un semigrupp commutativo con elemento unità $\bar{1}$ (monoide commutativo).
- $(\&, \rightarrow)$ formano una coppia aggiunta:

$$z \leq x \rightarrow y \text{ sse } x * z \leq y$$

- $x \wedge y = x \& (x \rightarrow y)$,
- $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = 1$.

La classe **BL** delle BL-algebre forma una varietà (la coppia aggiunta può essere resa equazionalmente).

ESEMPIO: Ogni MV-algebra, ogni G-algebra e ogni Π -algebra sono esempi di BL-algebre. In realtà le varietà **MV** delle MV-algebre, **G** delle algebre di Gödel, **P** delle algebre prodotto, sono sottovarietà di **BL**

ESERCIZIO: Caratterizzare **MV**, **G** e **P** come sottovarietà di **BL**.

COMPLETEZZA STANDARD

DEFINITION

Una BL-algebra *standard* è una BL-algebra il cui universo è l'intervallo unitario $[0, 1]$, l'operazione $\&$ è una t-norma continua, e \rightarrow coincide con il residuo di $\&$.

FATTO: La varietà \mathbb{BL} è generata dalle BL-catene, dove per BL-catena si intende, al solito, una BL-algebra il cui ordine dato dalle operazioni reticolati \wedge e \vee sia lineare.

Di conseguenza abbiamo:

THEOREM

- (1) *La logica BL è completa rispetto alla varietà \mathbb{BL} .*
- (2) *La logica BL è completa rispetto alla classe delle BL-catene.*

Per ottenere un teorema di completezza *standard* (ovvero rispetto alla classe delle BL-algebre standard) procediamo come segue: da qui in avanti ci interesseremo solamente alle BL-catene.

Proposizione A: Sia $(C, \&, \rightarrow, \wedge, \vee, 0, 1)$ una BL-catena e siano u e v due idempotenti di C tali che $u < v$. Definiamo $[u, v]_C = \{x \in C \mid u \leq x \leq v\}$. Allora $([u, v]_C, \&', \rightarrow', \wedge, \vee, u, v)$ è una BL-catena dove, per ogni $x, y \in [u, v]_C$,

- $x \&'y = x \&y$.
- $x \rightarrow' y = \begin{cases} x \rightarrow y & \text{se } x > y \\ v & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Definizione B: Una coppia (X, Y) è detta un CUT (taglio) in una BL-catena C se:

- $X \cup Y = C$
- $x \leq y$ per ogni $x \in X$ e $y \in Y$
- Y è chiuso per $\&$
- $x \&y = x$ per ogni $x \in X$ e $y \in Y$.

Definizione C: Una BL-catena C è detta *saturata* se per ogni taglio (X, Y) in C esiste un idempotente u di C tale che $x \leq u \leq y$ per ogni $x \in X$ e $y \in Y$.

Teorema D: Ogni BL-catena C può essere immersa in una catena saturata \bar{C} . Inoltre C è densa in \bar{C}

La costruzione di *somma ordinale* si estende alle catene come segue:

Definizione E: Siano C_1 e C_2 due BL-catene, e assumiamo che $1_1 = 0_2$ e che $C_1 \setminus \{1_1\} \cup C_2 \setminus \{0_2\} = \emptyset$.

La *somma ordinale* di C_1 e C_2 è la BL-catena

$$C_1 \oplus C_2 = (C_1 \cup C_2, \&, \rightarrow, \wedge, \vee, 0_1, 1_2)$$

le cui operazioni \wedge, \vee e $\&$ coincidono con quelle di C_i se applicate a coppie di elementi di C_i , altrimenti, se $x \in C_1$ e $y \in C_2$,

$$x \wedge y = y \wedge x = x, \quad x \vee y = y \vee x = y, \quad x \& y = y \& x = x.$$

Infine \rightarrow è così definita:

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 1_2 & \text{se } x \leq y \\ x \rightarrow_i y & \text{se } x > y \text{ e } x, y \in C_i \\ y & \text{se } x > y \text{ e } x \in C_2, y \in C_1. \end{cases}$$

Definizione F: Una BL-catena C è detta *irriducibile* se non esistono BL-catene C_1 e C_2 di almeno due elementi, tali che $C = C_1 \oplus C_2$.

Teorema G: Ogni BL-catena saturata C è una somma ordinale di BL-catene saturate e irriducibili. In particolare

$$C = \bigoplus_{\alpha \in E} [\alpha, \alpha^+]_C$$

dove E è l'insieme degli idempotenti di C e α^+ è il successore in E di α (se esiste, altrimenti $\alpha^+ = \alpha$).

Più in particolare abbiamo il seguente:

Teorema H: Ogni BL-catena irriducibile è

- Una MV-catena se ha divisori dello zero non banali,
- Una catena prodotto, se non ha divisori dello zero non banali

In definitiva abbiamo che ogni BL-catena C si immerge (isomorficamente) in una BL-catena saturata \overline{C} .

Inoltre \overline{C} è una somma ordinale di MV-catene o P-catene, le quali si immergono (parzialmente) nelle rispettive algebre standard.

Quindi ogni BL-catena C si immerge parzialmente in una BL-catena standard. Da cui il teorema di completezza standard segue facilmente.