T-norme continue e BL-algebre

Tommaso Flaminio

Università di Siena

May 20, 2009

...RICAPITOLANDO

Linguaggio: insieme numerabile di variabili proposizionali $\{p_1, p_2, \ldots\}$, simboli per connettivi: $\&$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\overline{0}$ (tipo $(2,2,2,0)$).

- La logica di Gödel è la logica che cattura le tautologie dell'algebra di Gödel standard:
$$[0,1]_G = ([0,1], \wedge, \vee, \rightarrow, \overline{0}, \overline{1}).$$
Dove, per ogni $x, y \in [0,1]$, $x \wedge y = \min\{x, y\}$, $x \vee y = \max\{x, y\}$, $x \rightarrow y = 1$ se $x \leq y$ oppure y.
- La Logica di Łukasiewicz è la logica che cattura le tautologie della MV-algebra standard:
$$[0,1]_{MV} = ([0,1], \&, \rightarrow, \wedge, \vee, \overline{0}, \overline{1}).$$
Dove, per ogni $x, y \in [0,1]$, $x \& y = \max\{0, x + y - 1\}$, $x \rightarrow y = \min\{1, 1 - x + y\}$, $\wedge$ e $\vee$ come in $[0,1]_G$.
- La Logica di prodotto è la logica che cattura le tautologie della Π-algebra standard:
$$[0,1]_\Pi = ([0,1], \&, \rightarrow, \wedge, \vee, \overline{0}, \overline{1}).$$
Dove, per ogni $x, y \in [0,1]$, $x \& y = xy$, $x \rightarrow y = 1$ se $x \leq y$, oppure y/x. $\wedge$ e $\vee$ come in $[0,1]_G$.

- La logica di Gödel è caratterizzata dall'interpretazione di $x \& y$ come $\min\{x, y\}$
- La logica di Łukaseiwicz è caratterizzata dall'interpretazione di $x \& y$ come $\max\{0, x + y - 1\}$
- La logica di prodotto è caratterizzata dall'interpretazione di $x \& y$ come xy

Queste tre funzioni $(*)$ hanno in comune le seguenti proprietà:

- $* : [0, 1]^2 \to [0, 1]$
- $*$ ristretta alla catena $\{0, 1\}$ coincide con l'interpretazione della congiunzione classica
- $*$ è commutativa e associativa
- $x * 0 = 0$ e $x * 1 = x$
- $*$ è monotona crescente in entrambi gli argomenti
- $*$ è continua

T-norme continue

Definition

Una funzione $*: [0,1]^2 \to [0,1]$ è una t-norma se:

- $*$ è commutativa e associativa:
$$x * y = y * x \text{ e } x * (y * z) = (x * y) * z.$$
- $*$ è non-decrescente in entrambi gli argomenti:
$$\text{Se } y_1 \leq y_2, \text{ allora } x * y_1 \leq x * y_2.$$
- $1 * x = x$ e $0 * x = 0$.

Una t-norma $*$ è detta *continua* se $*$ è continua cone funzione.

D'ora in avanti chiameremo le precedenti, rispettivamente:

La t-norma del minimo (o la t-norma di Gödel)

La t-norma di Łukasiewicz

La t-norma del prodotto

Il teorema di somma ordinale

Le precedenti t-norme (Gödel, Łukasiewicz, e prodotto) sono le tre t-norme continue fondamentali, nel senso che, come vedremo a breve, ogni t-norma continua $*$ si ottine come combinazione delle tre precedenti.

Struttura che intendiamo analizzare è il semigruppo commutativo e ordinato $([0,1], *, \leq)$ dove $*$ è una t-norma continua.
Ricodiamo che un elemento $x \in [0,1]$ è detto:

- idempotente (relativamente a $*$) se $x * x = x$.
- nilpotente (relativamente a $*$) se esiste un $n \in \mathbb{N}$, tale che $0 = x^n = x * \ldots * x$ (n-volte).

ESEMPIO: Se $*$ è la t-norma di Gödel, allora ogni elemento $x \in [0,1]$ è idempotente. 0 e 1 sono idempotenti per ogni $*$. Per ogni $*$, 0 è un nilpotente.

Definition

Una t-norma continua è detta:

- Archimedea se, oltre allo 0 e 1, non ha altri idempotenti,
- Stretta se è Archimedea e non ha altri nilpotenti eccetto allo 0,
- Nilpotente se è Archimedea, ma non stretta

Per ogni t-norma continua $*$, l'insieme E degli elementi idempotenti di $*$ è un sottoinsieme chiuso di $[0, 1]$, e quindi il suo complemento è l'unione contabile di un insieme $I_{open}(E)$ di intervalli aperti, e disgiunti.
Sia $[a, b] \in I(E)$ sse $(a, b) \in I_{open}(E)$. Per ogni $I \in I(E)$ indichiamo con $* \mid I$ la restrizione di $*$ all'intervallo chiuso I.

Theorem

Siano $*$, E e $I(E)$ come sopra. Allora:

- *Per ogni $I \in I(E)$, $* \mid I$ è isomorfa alla t-norma prodotto, o alla t-norma di Łukasiewicz*
- *Se $x, y \in [0, 1]$, e non esiste alcun $I \in I(E)$ tale che $x, y \in I$, allora $x * y = \min(x, y)$.*

Proof.

Per ogni $I \in I(E)$ la mappa f che manda $I = [a, b]$ in $[0, 1]$ rende la restrizione di $*$ a I una t-norma continua e Archimedea: se $a < x < b$ allora $a * x = a$ e $b * x = x$.[a] Se $x < y$ e x e y non appartengono allo stesso intervallo I, allora esiste un idempotente a tale che $x \leq a \leq y$, ne segue che $x * y = x$[b].

Rimane da mostrare che ogni t-norma continua Archimdea e stretta è isomorfa alla t-norma prodotto e che ogni t-norma continua, Archimedea e nilpotente è isomorfa alla t-norma di Łukasiewicz. □

[a] Infatti, se $x \leq y$, allora $x = y * (y \to x)$ (si veda [Lemma 2.1.7, Haj98])

[b] Infatti, se $a \leq u \leq b$ e u è un idempotente, allora $a * b = a$ (si veda [Lemma 2.1.7, Haj98])

Lemma

(1) Se $*$ *è stretta, allora* $([0,1], *, \leq)$ *è isomorfo a* $([0,1], \cdot, \leq)$*, dove* $\cdot$ *indica la t-norma prodotto.*
(2) Se $*$ *è nilpotente allora* $([0,1], *, \leq)$ *è isomorfo a* $([1/4,1], \hat{*}, \leq)$*, dove* $x \hat{*} y = \max(1/4, x \cdot y)$ *(prodotto troncato ad* $1/4$*)*
(3) Il semigruppo $([1/4,1], \hat{*}, \leq)$ *è isomorfo a* $([0,1], *_{Ł}, \leq)$*, dove* $*_{Ł}$ *indica la t-norma di Łukasiewicz.*

Calcolo $PC(*)$

Sia $*$ una t-norma continua fissata. Consideriamo il linguaggio $\mathcal{L} = \{Var = \{p_1, p_2, \ldots\}, \&, \to, \wedge, \overline{0}\}$. L'interpretazione intesa delle formule in $\mathcal{L}$ modulo $*$ è la seguente:

- $*$ è la funzione di verità per il connettivo di *congiunzione forte* $\&$.
- Il residuo $\Rightarrow_*$ di $*$ è la funzione di verità per il connettivo di *implicazione* $\to$.
- L'operazione di minimo min è la funzione di verità per il connettivo di *congiunzione debole* $\wedge$.

In $PC(*)$ possiamo definire ulteriori connettivi come segue:

$$
\begin{array}{lcl}
\neg\varphi & = & \varphi \to \overline{0}, \\
\varphi \vee \psi & = & ((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi), \\
\varphi \leftrightarrow \psi & = & (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi), \\
[\varphi \wedge \psi & = & \varphi \& (\varphi \to \psi)]
\end{array}
$$

Abbiamo visto che una t-norma continua $*$ è una buona scelta per interpretare il connettivo di congiunzione (forte), infatti $*$ è commutativa, generalizza la congiunzione classica, è associativa, etc...
Inoltre $*$ (quando è continua) consente di deifnire l'oeratore di residuo:

$$x \Rightarrow_* y = \sup\{z \in [0,1] \mid x * z \leq y\}.$$

DOMANDA: La scelta di $\Rightarrow_*$ è una buona scelta come funzione di verità di una implicazione? Quale che sia la t-norma $*$:

- $0 \Rightarrow_* 0 = 0 \Rightarrow_* 1 = 1 \Rightarrow_* 1 = 1$ e $1 \Rightarrow_* 0 = 0$. Quindi $\Rightarrow_*$ generalizza l'(a funzione di verità dell')implicazione classica.
- La funzione $(x, y) \mapsto x \Rightarrow_* y$ è non crescente in x e non decrescente in y.
- $\Rightarrow_*$ soddisfa la regola di fuzzy modus-ponens: da un (limite inferiore) del valore di verità x di φ e da un (limite inferiore) del valore di verità $z = x \Rightarrow_* y$ di $\varphi \to \psi$ dobbiamo saper calcolare un lower bound per il valore di verità y di ψ.
  Se prendiamo $\Rightarrow_*$ per calcolare il valore di $\varphi \to \psi$ allora abbiamo che:

  $$\text{SE } a \leq x \text{ E } b \leq x \Rightarrow_* y, \text{ ALLORA } a * b \leq y.$$

La logica BL e BL-algebre

Consideriamo il linguaggio $\mathcal{L} = \{Var = \{p_1, p_2, \ldots\}, \&, \to, \wedge, \overline{0}\}$.
I seguenti sono gli assiomi di BL (si veda [Haj98]).

(B1) $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

(B2) $\varphi \& \psi \to \psi$

(B3) $\varphi \& \psi \to \psi \& \varphi$

(B4) $\varphi \& (\varphi \to \psi) \to \psi \& (\psi \to \varphi)$

(B5a) $\varphi \to (\psi \to \chi) \to (\varphi \& \psi \to \chi)$

(B5b) $(\varphi \& \psi \to \chi) \to \varphi \to (\psi \to \chi)$

(B6) $((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$

(B7) $\overline{0} \to \varphi$

Nota: confrontare questo sistema di assiomi con quello che abbiamo dato per G, quello di Ł, e quello per Π.

Qualche proprietà

- $\vdash_{BL} (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$.
- $T \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form(\mathcal{L})$. $T \cup \{\varphi\} \vdash_{BL} \psi$ sse $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $T \vdash_{BL} \varphi^n \to \psi$.
- $(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$
- $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$

BL-algegre

Una struttura $A = (A, \&, \rightarrow, \wedge, \vee, \overline{0}, \overline{1})$ (di tipo $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$) è una BL-algebra se

- $(A, \wedge, \vee, \overline{0}, \overline{1})$ è un reticolo limitato, con top $\overline{1}$ e bottom $\overline{0}$.
- $(A, \&, 1)$ è un semigruppo commutativo con elemento unità $\overline{1}$ (monoide commutativo).
- $(\&, \rightarrow)$ formano una coppia aggiunta:

$$z \leq x \rightarrow y \text{ sse } x * z \leq y$$

- $x \wedge y = x\&(x \rightarrow y)$,
- $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = 1$.

La classe $\mathbb{BL}$ delle BL-algebre forma una varietà (la coppia aggiunta può essere resa equazionalmente).

ESEMPIO: Ogni MV-algebra, ogni G-algebra e ogni Π-algebra sono esempi di BL-algebre. In realtà le varietà $\mathbb{MV}$ delle MV-algebre, $\mathbb{G}$ delle algebre di Gödel, $\mathbb{P}$ delle algebre prodotto, sono sottovarietà di $\mathbb{BL}$

ESERCIZIO: Caratterizzare $\mathbb{MV}, \mathbb{G}$ e $\mathbb{P}$ come sottovarietà di $\mathbb{BL}$.

Completezza standard

Definition

Una BL-algebra *standard* è una BL-algebra il cui universo è l'intervallo unitario $[0,1]$, l'operazione & è una t-norma continua, e $\rightarrow$ coincide con il residuo di &.

FATTO: La varietà $\mathbb{BL}$ è generata dalle BL-catene, dove per BL-catena si intende, al solito, una BL-algebra il cui ordine dato dalle operazioni reticolati $\wedge$ e $\vee$ sia lineare.
Di consequenza abbiamo:

Theorem

(1) La logica BL è completa rispetto alla varietà $\mathbb{BL}$.
(2) La logica BL è completa rispetto alla classe delle BL-catene.

Per ottenere un teorema di completezza *standard* (ovvero rispetto alla classe delle BL-algebre standard) procediamo come segue: da qui in avanti ci interesseremo solamente alle BL-catene.

Proposizione A: Sia $(C, \&, \to, \wedge, \vee, 0, 1)$ una BL-catena e siano u e v due idempotenti di C tali che $u < v$. Definiamo $[u, v]_C = \{x \in C \mid u \leq x \leq v\}$. Allora $([u, v]_C, \&', \to', \wedge, \vee, u, v)$ è una BL-catena dove, per ogni $x, y \in [u, v]_C$,

- $x \&' y = x \& y$.
- $x \to' y = \begin{cases} x \to y & \text{se } x > y \\ v & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Definizione B: Una coppia (X, Y) è detta un CUT (taglio) in una BL-catena C se:

- $X \cup Y = C$
- $x \leq y$ per ogni $x \in X$ e $y \in Y$
- Y è chiuso per $\&$
- $x \& y = x$ per ogni $x \in X$ e $y \in Y$.

Definizione C: Una BL-catena C è detta *saturata* se per ogni taglio (X, Y) in C esiste un idempotente u di C tale che $x \leq u \leq y$ per ogni $x \in X$ e $y \in Y$.

Teorema D: Ogni BL-catena C può essere immersa in una catena saturata $\overline{C}$. Inoltre C è densa in $\overline{C}$

La costruzione di *somma ordinale* si estende alle catene come segue:
Definizione E: Siano C_1 e C_2 due BL-catene, e assumiamo che $1_1 = 0_2$ e che $C_1 \setminus \{1_1\} \cup C_2 \setminus \{0_2\} = \emptyset$.
La *somma ordinale* di C_1 e C_2 è la BL-catenta

$$C_1 \oplus C_2 = (C_1 \cup C_2, \&, \rightarrow, \wedge, \vee, 0_1, 1_2)$$

le cui operazioni $\wedge, \vee$ e $\&$ coincidono con quelle di C_i se applicate a coppie di elementi di C_i, altrimenti, se $x \in C_1$ e $y \in C_2$,

$$x \wedge y = y \wedge x = x,\ x \vee y = y \vee x = y,\ x\&y = y\&x = x.$$

Infine $\rightarrow$ è così definita:

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 1_2 & \text{se } x \leq y \\ x \rightarrow_i y & \text{se } x > y \text{ e } x, y \in C_i \\ y & \text{se } x > y \text{ e } x \in C_2, y \in C_1. \end{cases}$$

Definizione F: Una BL-catena C è detta *irriducibile* se non esistono BL-catene C_1 e C_2 di almeno due elementi, tali che $C = C_1 \oplus C_2$.

Teorema G: Ogni BL-catena saturata C è una somma ordinale di BL-catene saturate e irriducibili. In particolare

$$C = \bigoplus_{\alpha \in E} [\alpha, \alpha^+]_C$$

dove E è l'insieme degli idempotenti di C e α^+ è il successore in E di α (se esiste, altrimenti $\alpha^+ = \alpha$).
Più in particolare abbiamo il seguente:
Teorema H: Ogni BL-catena irriducibile è

- Una MV-catena se ha divisori dello zero non banali,
- Una catena prodotto, se non ha divisori dello zero non banali

In definitiva abbiamo che ogni BL-catena C si immerge (isomorficamente) in una BL-catena saturata $\overline{C}$.

Inoltre $\overline{C}$ è una somma ordinale di MV-catene o P-catene, le quali si immergono (parzialmente) nelle rispettive algebre standard.

Quindi ogni BL-catena C si immerge parzialmente in una BL-catena standard. Da cui il teorema di completezza standard segue facilmente.