Estensione al primo ordine delle logiche basate su t-norme

Tommaso Flaminio

Università di Siena

May 28, 2009

1. Estendere il linguaggio: logiche al primo ordine e strutture

2. Completezza algebrica per le logiche al primo ordine

3. Completezza standard per logiche al primo ordine

Logiche al primo ordine e strutture al primo ordine

Sia $\mathcal{L}$ una Core Fuzzy Logic ($\mathcal{CFL}$ da quì in avanti). Indichiamo con $\mathcal{L}\forall$ l'estensione di $\mathcal{L}$ ottenuta nel seguente modo:

1. Estendiamo il linguaggio di $\mathcal{L}$ con un insieme (non vuoto) di simboli per predicati $\mathcal{P} = \{P_i \mid i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$. Ad ogni predicato P_i è associto un numero naturale $n \in \mathbb{N}$: la sua arietà.
2. Introduciamo anche un insieme (possibilmente vuoto) $\mathcal{C} = \{c_j \mid j \in J \subseteq \mathbb{N}\}$ di simboli per "oggetti costanti".
3. Simboli logici:
    - (Simboli per) oggetti variabili $x, y, \ldots$
    - Connettivi $\&, \rightarrow, \wedge$
    - Costanti di verità: $\overline{0}$ e $\overline{1}$
    - Quantificatori: $\forall$ e $\exists$

Il linguaggio predicativo così ottenuto verrà indicato con $\mathcal{I}$.

- *Termini*: oggetti variabili ed oggetti costanti,
- *Formule atomiche*: Ogni termine è una formula atomica. Per ogni $i \in I$, se P_i ha arietà r, e $t_1, \ldots, t_r$ sono termini, allora $P_i(t_1, \ldots, t_r)$ è una formula atomica,
- *Formule*: Ogni formula atomica è una formula. Se φ e ψ sono formule e x è un oggetto variabile, allora le seguenti sono formule:

$$\bar{0},\ \bar{1},$$

$$\varphi \& \psi,\ \varphi \to \psi,$$

$$\forall x \varphi,\ \exists x \varphi.$$

La semantica per $\mathcal{L}\forall$ è ristretta alle $\mathcal{L}$-catente. Ovvero, i valori di verità delle formule variano in una $\mathcal{L}$-algebra linearmente ordinata.

Definition

Sia $\mathcal{I}$ un linguaggio predicativo e sia A una $\mathcal{L}$-algebra linearmente ordinata. Una *$\mathcal{L}$-struttura per $\mathcal{I}$*

$$M = (M, (r_P)_{P \in \mathcal{P}}, (m_c)_{c \in \mathcal{C}})$$

è composta da:

- Un insieme non vuoto M,
- Per ogni predicato r-ario $P \in \mathcal{P}$, r_P è una relazione fuzzy da M^r in A. Ogni relazione r-aria r_P associa ad ogni r-pla $(m_1, \ldots, m_r) \in M^r$ il grado di appartenenza $r_P(m_1, \ldots, m_r) \in A$ di $(m_1, \ldots, m_r)$ alla fuzzy relazione.
- Per ogni oggetto costante $c \in \mathcal{C}$, $m_c \in M$.

Esempio di Fuzzy Relazione: Nel linguaggio $\mathcal{I}$ abbiamo un predicato binario *like* ed un oggetto costante *Mary*. A è l'algebra $[0,1]_{MV}$, $M = \{1,2,3\}$, e $m_{Mary} = 1 \in M$. La relazione r_{like} è data dalla seguente matrice:

	1	2	3
1	1	0.3	0.7
2	0.9	0.9	0
3	0.6	0.4	0.1

Sia $\mathcal{I}$ un linguaggio predicativo, e sia M una A-struttura per $\mathcal{I}$. Definiamo una *M-valutazione di oggetti variabili*, una mappa v che assegna, ad ogni oggetto variabile x un elemento v(x)$\in M$.
Se v e v' sono due M-valutazioni, e se x è un oggetto variabile, scriviamo $v =_x v'$ ad indicare che $v(y) = v'(y)$ per ogni variabile $y \neq x$.
Il valore di verità di una formula ϕ, nel modello M alla valutazione v ($\|\phi\|^A_{M,v}$) è induttivamente definito come segue:

- Se ϕ è una variabile x, allora $\|x\|^A_{M,v} = v(x)$.
- Se ϕ è una costante c, allora $\|c\|^A_{M,v} = m_c$.
- Se ϕ è atomica, $\|P(t_1, \ldots, t_r)\|^A_{M,v} = r_P(\|t_1\|^A_{M,v}, \ldots, \|t_r\|^A_{M,v})$.
- Per ogni $\star \in \{\&, \to, \wedge\}$, $\|\varphi \star \psi\|^A_{M,v} = \|\varphi\|^A_{M,v} \star \|\psi\|^A_{M,v}$.
- $\|\forall x \varphi\|^A_{M,v} = \inf\{\|\varphi\|^A_{M,v'} \mid v' =_x v\}$.
- $\|\exists x \varphi\|^A_{M,v} = \sup\{\|\varphi\|^A_{M,v'} \mid v' =_x v\}$.

Le ultime due, sempre che l'infimo e il supremo siano definiti in A, altrimenti il valore di verità di ϕ è indefinito.
Un struttura M è detta *A-safe* se tutti gli infimi e supremi necessari a definire i valori di verità delle formule, esistono in A.

Definition

I seguenti sono gli assiomi sui quantificatori:

($\forall$1) $(\forall x \varphi(x)) \to \varphi(t)$ (con t termine sostituibile per x in φ)

($\exists$1) $\varphi(t) \to (\exists x \varphi(x))$ (con t termine sostituibile per x in φ)

($\forall$2) $(\forall x(\psi \to \varphi)) \to (\psi \to (\forall x \varphi))$ (x non libero in ψ)

($\exists$2) $(\forall x(\varphi \to \psi)) \to ((\exists x \varphi) \to \psi)$ (x non libero in ψ)

($\forall$3) $(\forall x(\varphi \vee \psi)) \to ((\forall x \varphi) \vee \psi)$ (x non libero in ψ)

Definition

Sia $\mathcal{L}$ una $\mathcal{CFL}$. Il calcolo $\mathcal{L}\forall$ è dato dai seguenti assiomi e regole:

- Tutte le formule che risultano dagli assiomi di $\mathcal{L}$ sostituendo arbitrarie formule di $\mathcal{I}$ al posto delle variabili proposizionali.
- Gli assiomi ($\forall$1) – ($\forall$3) e ($\exists$1), ($\exists$2) per i quantificatori.
- La regola di Modus Ponens (da φ e $\varphi \to \psi$, deduci ψ).
- La regola di Necessitazione per $\forall$ (da φ, deduci $\forall x \varphi$).

Completezza Algebrica

Definition

Sia T una teoria su $\mathcal{L}\forall$. T è detta:

- *Consistente* se esiste almeno una formula φ, tale che $T \nvdash_{\mathcal{L}\forall} \varphi$.
- *Completa* se per ogni coppia di formule φ, ψ, $T \vdash_{\mathcal{L}\forall} (\varphi \to \psi)$ oppure $T \vdash_{\mathcal{L}\forall} (\psi \to \varphi)$.
- *Henkin* se per ogni formula chiusa della forma $\forall x \varphi(x)$, che risulta non dimostrabile in T, allora esiste una costante c nel linguaggio di T, tale che $T \nvdash_{\mathcal{L}\forall} \varphi(c)$.

Lemma

(1) T è inconsistente sse $T \vdash_{\mathcal{L}\forall} \overline{0}$.

(2) T è completa sse, per ogni coppia di formule chiuse φ e ψ, $T \vdash_{\mathcal{L}\forall} (\varphi \vee \psi)$, implica che $T \vdash_{\mathcal{L}\forall} \varphi$, oppure $T \vdash_{\mathcal{L}\forall} \psi$.

Dimostrazione: Esercizio!

Definition

Per ogni teoria T di $\mathcal{L}\forall$, sia $\mathcal{A}_T$ l'algebra delle classi di equivalenza di formule chiuse (!) modulo T-dimostrabilità, con le usuali operazioni: $[\varphi]_T \to [\psi]_T = [\varphi \to \psi]_T$ etc...

Lemma

(A) Se T è una teoria completa, allora $\mathcal{A}_T$ è linearmente ordinata.

(B) Se T è Henkin, allora per ogni formula $\varphi(x)$ (x è la sua sola variabile libera)

$$[\forall x\varphi] = \inf_c [\varphi(c)]_T$$

$$[\exists x\varphi] = \sup_c [\varphi(c)]_T.$$

Con c che varia su tutte le costanti (simboli per...) che compaiono in T.

Proof of Lemma

(A) Questa conclusione è ovvia, dato che $[\varphi]_T \leq [\psi]_T$ sse $[\varphi]_T \to [\psi]_T = [\top]_T$ sse $[\varphi \to \psi]_T = [\top]_T$ sse $T \vdash_{\mathcal{L}\forall} (\varphi \to \psi)$.

(B) Per l'assioma ($\forall 1$), e ragionando come in (A), è ovvio che $[\forall x \varphi]_T \leq [\varphi(c)]_T$ per ogni c, quindi

$$[\forall x \varphi]_T \leq \inf\{[\varphi(c)]_T \mid c \ll T\}.^1 \tag{1}$$

Rimane da mostrare l'altra disuguaglianza. A tal fine, assumiamo per assurdo che esista una formula γ tale che $[\gamma]_T \leq [\varphi(c)]_T$ per ogni $c \ll T$, ma $[\gamma]_T \not\leq [\forall x \varphi]_T$. Ne consegue che $T \not\vdash_{\mathcal{L}\forall} (\gamma \to \forall x \varphi)$, quindi (per ($\forall 2$)) $T \not\vdash_{\mathcal{L}\forall} \forall x(\gamma \to \varphi)^2$, e quindi, dato che T è di Henkin, esiste un $c' \ll T$ tale che $T \not\vdash_{\mathcal{L}\forall} (\gamma \to \varphi(c'))$, e quindi $[\gamma]_T \not\leq [\varphi(c')]_T$. Contraddizione.
Quindi $[\forall x \varphi] = \inf_c [\varphi(c)]_T$
Il caso per $\exists$ è analogo ed omesso.

[1] $c \ll T$ significa che c è una costante che occorre in almeno una formula di T.

[2] Se T dimostrasse $\forall x(\gamma \to \varphi)$, da ($\forall 2$) e con un MP, otterremmo $\gamma \to \forall x \varphi$.

Lemma

Per ogni teoria T ed ogni formula chiusa φ, se $T \not\vdash_{\mathcal{L}\forall} \varphi$, allora esiste una teoria Henkin e completa T' tale che $T' \supseteq T$, e $T' \not\vdash_{\mathcal{L}\forall} \varphi$.

Lemma

Per ogni teoria T Henkin e completa, ed ogni formula chiusa φ non dimostrabile in T, esiste una $\mathcal{L}$-catena A, ed una A-struttura M di T tale che $\|\varphi\|_M^A < 1$.

DIM: Definiamo M (l'universo del modello) come l'insieme di tutte le costanti $c \ll T$, e $m_c = c$ per ognuna di tali costanti.
Sia A_T la $\mathcal{L}$-catena delle classi di equivalenza delle formule modulo T-dimostrabilità.
Per un precedente lemma, A_T è effettivamente una $\mathcal{L}$-catena.
Per ogni predicato P di arietà r, sia $r_P(c_1, \ldots, c_r) = [P(c_1, \ldots, c_r)]_T$.
Questo completa la definizione del modello M. Rimane da dimostrare che, per ogni formula chiusa φ, $\|\varphi\|_M^A = [\varphi]_T$.

Per ogni assioma α, $\|\alpha\|_M^{A_T} = [\alpha]_T = [\top]_T = 1_A$. Inoltre $\|\varphi\|_M^{A_T} = [\varphi]_T \neq [\top]_T = 1_A$.
Se α è una formula atomica chiusa, allora la conclusione segue dalla definizione data in precedenza. Inoltre è facile vedere che la tesi segue per le formule definite con il solo uso di connettivi logici.
Per quanto riguarda i quantificatori osserviamo che:

$$\|\forall x \alpha(x)\|_M^{A_T} = \inf_c \{\|\alpha(c)\|_M^{A_T}\} = \inf_c \{[\alpha(c)]_T\} = [\forall x \alpha(x)]_T.$$

Dove:

- La prima uguaglianza segue dal fatto che ogni elemento di M coincide con un simbolo per costante (se stesso!), pertanto ogni variabile viene valutata in una costante (in altre parole per ogni x ed ogni v esiste una c, $v(x) = c$).
- La seconda uguaglianza segue per il passo induttivo.
- La terza è assicurata da un Lemma precedente.

Theorem

Sia $T \cup \varphi$ una teoria arbitraria su $\mathcal{L}\forall$ nel linguaggio $\mathcal{I}$. Le seguenti sono equivalenti:

- $T \vdash_{\mathcal{L}\forall} \varphi$,
- *Per ogni $\mathcal{L}$-catena A ed ogni A-modello safe M,* $\|\varphi\|_M^A = 1_A$.

Come notazione, d'ora in avanti scriveremo anche $(M, A) \models \varphi$, ad indicare che $\|\varphi\|_M^A = 1$.

Completezza Standard

Ricordiamo che, nel caso proposizionale la completezza di una $\mathcal{CFL}$ $\mathcal{L}$ rispetto ad una classe di strutture $\mathbb{K}$ viene solitamente dimostrata via propietà di immersione (parziale) delle algebre:

$\mathcal{L}$ ha la $FS\mathbb{K}C$ allora ogni $\mathcal{L}$-catena è parzialmente immergibile in $\mathbb{K}$.

$\mathcal{L}$ ha la $S\mathbb{K}C$ allora ogni $\mathcal{L}$-catena è immergibile in $\mathbb{K}$.

In particolare ricordiamo i casi interessanti, quando $\mathbb{K} = \mathcal{R}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}^*$.

Nuovamente ricordiamo i passi base della dimostrazione (ad esempio per la $\mathcal{SRC}$).

- Sia $T \cup \{\varphi\}$ una teoria su $\mathcal{L}$, tale che $T \not\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.
- Per la completezza algebrica (catene) esiste una valutazione e su una $\mathcal{L}$-catena A tale che $e(t) = 1$, per ogni $t \in T$, e $e(\varphi) < 1$.
- Sia $X = \{e(\psi) \mid \psi$ è sottoformula di $T \cup \{\varphi\}\}$, e chiamiamo A_X la sottoalgebra contabile di A generata da X.
- Potendo immergere A in un'algebra $B \in \mathbb{K}$ via una mappa f, abbiamo che la composizione $f \circ e : Form \to B$ è una valutazione η tale che:

$$\eta(t) = 1 \text{ per ogni } t \in T, \text{ e } \eta(\varphi) < 1.$$

DOMANDA: A cosa serve richiedere che f sia una immersione? In particolare a cosa serve chiedere che f sia un morfismo?

Nuovamente ricordiamo i passi base della dimostrazione (ad esempio per la $\mathcal{SRC}$).

- Sia $T \cup \{\varphi\}$ una teoria su $\mathcal{L}$, tale che $T \not\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.
- Per la completezza algebrica (catene) esiste una valutazione e su una $\mathcal{L}$-catena A tale che $e(t) = 1$, per ogni $t \in T$, e $e(\varphi) < 1$.
- Sia $X = \{e(\psi) \mid \psi$ è sottoformula di $T \cup \{\varphi\}\}$, e chiamiamo A_X la sottoalgebra contabile di A generata da X.
- Potendo immergere A in un'algebra $B \in \mathbb{K}$ via una mappa f, abbiamo che la composizione $f \circ e : Form \to B$ è una valutazione η tale che:

$$\eta(t) = 1 \text{ per ogni } t \in T, \text{ e } \eta(\varphi) < 1.$$

DOMANDA: A cosa serve richiedere che f sia una immersione? In particolare a cosa serve chiedere che f sia un morfismo?
RISPOSTA: Serve ad assicurare che la composizione $f \circ e$ sia una valutazione, e quindi commuti con gli operatori dell'algebra: ad esempio $f \circ e(\varphi \& \psi) = f(e(\varphi \& \psi)) = f(e(\varphi) \& e(\psi)) = f(e(\varphi)) \& f(e(\psi))$.

DOMANDA: e per quanto riguarda il primo ordine? Quale proprietà sarà necessaria per dimostrare che una logica $\mathcal{L}\forall$ soddisfa (ad esempio) la $S\mathbb{K}C$?

DOMANDA: e per quanto riguarda il primo ordine? Quale proprietà sarà necessaria per dimostrare che una logica $\mathcal{L}\forall$ soddisfa (ad esempio) la $S\mathbb{K}C$?

Definition

Siano A e B due algebre dello stesso tipo e assumiamo che abbiano operatori reticolari (definibili). Diciamo che una immersione $f : A \to B$ è una σ-immersione se

$$f(\sup(C)) = \sup(f[C]) \text{ e } f(\inf(D)) = \inf(f[D])$$

per sottoinsiemi C e D di A numerabili, e tali che $\sup(C)$ e $\inf(D)$ esistano in A.

Ovvero f è una σ-immersione se è una immersione che preserva tutti gli infimi e supremi esistenti in A.

Theorem

Sia $\mathcal{L}$ una $\mathcal{CFL}$. Allora le seguenti sono equivalenti:

- *Per ogni $\mathcal{L}$-catena contabile ed ogni modello contabile (M, A) (per il linguaggio predicativo $\mathcal{I}$), esiste una $\mathcal{L}$-catena $B \in \mathbb{K}$ ed un modello (M', B), tale che (M, A) è elementarmente immergibile in (M', B) via una coppia (f, g) tale che f è un isomorfismo.*
- *Ogni $\mathcal{L}$-catena contabile A si σ-immerge in qualche $\mathcal{L}$-catena $B \in \mathbb{K}$*

DIMOSTRAZIONE: Si veda

CEGGMN09 Cintula P., Esteva F., Godo L., Montagna F., Noguera C., *Distinguished Algebraic Semantics for T-norm Based Fuzzy Logics: Methods and Algebraic Equivalencies*. APAL 2009.

Corollary

La proprietà della σ immersione relativamente ad una classe di $\mathcal{L}$-catene contabili $\mathbb{K}$, implica la $S\mathbb{K}C$ per $\mathcal{L}\forall$.

Relativamente a completezza Reale, Razionale ricordiamo qualche risultato specifico:

	RC	FSRC	SRC	QC	FSQC	SQC
$MTL\forall$	si	si	si	si	si	si
$IMTL\forall$	si	si	si	si	si	si
$SMTL\forall$	si	si	si	si	si	si
$\Pi MTL\forall$	?	no	no	?	?	?
Ł$\forall$	no	no	no	si	si	si
$BL\forall$	no	no	no	no	no	no
$\Pi\forall$	no	no	no	si	si	si
$G\forall$	si	si	si	si	si	si
$CPC\forall$	no	no	no	no	no	no

Ricordiamo il seguente:

Lemma

Sia $\mathcal{L}$ una $\mathcal{CFL}$, le seguenti sono equivalenti:

- $\mathcal{L}\forall$ *soddisfa* $S\mathcal{R}^*C$,
- $\mathcal{L}\forall$ *soddisfa* $S\mathcal{Q}C$.

Corollary

La proprietà della σ*-immersione in* $\mathbb{K}$ *non caratterizza la* $S\mathbb{K}C$.