

ESTENSIONE AL PRIMO ORDINE DELLE LOGICHE BASATE SU T-NORME

Tommaso Flaminio

Università di Siena

May 28, 2009

- 1 ESTENDERE IL LINGUAGGIO: LOGICHE AL PRIMO ORDINE E STRUTTURE
- 2 COMPLETEZZA ALGEBRICA PER LE LOGICHE AL PRIMO ORDINE
- 3 COMPLETEZZA STANDARD PER LOGICHE AL PRIMO ORDINE

LOGICHE AL PRIMO ORDINE E STRUTTURE AL PRIMO ORDINE

Sia \mathcal{L} una Core Fuzzy Logic (\mathcal{CFL} da qui in avanti). Indichiamo con $\mathcal{L}\forall$ l'estensione di \mathcal{L} ottenuta nel seguente modo:

- 1 Estendiamo il linguaggio di \mathcal{L} con un insieme (non vuoto) di simboli per predicati $\mathcal{P} = \{P_i \mid i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$. Ad ogni predicato P_i è associato un numero naturale $n \in \mathbb{N}$: la sua arietà.
- 2 Introduciamo anche un insieme (possibilmente vuoto) $\mathcal{C} = \{c_j \mid j \in J \subseteq \mathbb{N}\}$ di simboli per "oggetti costanti".
- 3 Simboli logici:
 - (Simboli per) oggetti variabili x, y, \dots
 - Connettivi $\&, \rightarrow, \wedge$
 - Costanti di verità: $\bar{0}$ e $\bar{1}$
 - Quantificatori: \forall e \exists

Il linguaggio predicativo così ottenuto verrà indicato con \mathcal{I} .

- **Termini:** oggetti variabili ed oggetti costanti,
- **Formule atomiche:** Ogni termine è una formula atomica. Per ogni $i \in I$, se P_i ha arietà r , e t_1, \dots, t_r sono termini, allora $P_i(t_1, \dots, t_r)$ è una formula atomica,
- **Formule:** Ogni formula atomica è una formula. Se φ e ψ sono formule e x è un oggetto variabile, allora le seguenti sono formule:

$$\bar{0}, \bar{1},$$

$$\varphi \& \psi, \varphi \rightarrow \psi,$$

$$\forall x \varphi, \exists x \varphi.$$

La semantica per $\mathcal{L}\forall$ è ristretta alle \mathcal{L} -catente. Ovvero, i valori di verità delle formule variano in una \mathcal{L} -algebra linearmente ordinata.

DEFINITION

Sia \mathcal{I} un linguaggio predicativo e sia A una \mathcal{L} -algebra linearmente ordinata. Una *\mathcal{L} -struttura per \mathcal{I}*

$$M = (M, (r_P)_{P \in \mathcal{P}}, (m_c)_{c \in \mathcal{C}})$$

è composta da:

- Un insieme non vuoto M ,
- Per ogni predicato r -ario $P \in \mathcal{P}$, r_P è una relazione fuzzy da M^r in A . Ogni relazione r -aria r_P associa ad ogni r -pla $(m_1, \dots, m_r) \in M^r$ il grado di appartenenza $r_P(m_1, \dots, m_r) \in A$ di (m_1, \dots, m_r) alla fuzzy relazione.
- Per ogni oggetto costante $c \in \mathcal{C}$, $m_c \in M$.

Esempio di Fuzzy Relazione: Nel linguaggio \mathcal{I} abbiamo un predicato binario *like* ed un oggetto costante *Mary*. A è l'algebra $[0, 1]_{MV}$, $M = \{1, 2, 3\}$, e $m_{Mary} = 1 \in M$. La relazione r_{like} è data dalla seguente matrice:

	1	2	3
1	1	0.3	0.7
2	0.9	0.9	0
3	0.6	0.4	0.1

Sia \mathcal{I} un linguaggio predicativo, e sia M una A -struttura per \mathcal{I} .

Definiamo una M -valutazione di oggetti variabili, una mappa v che assegna, ad ogni oggetto variabile x un elemento $v(x) \in M$.

Se v e v' sono due M -valutazioni, e se x è un oggetto variabile, scriviamo $v =_x v'$ ad indicare che $v(y) = v'(y)$ per ogni variabile $y \neq x$.

Il valore di verità di una formula ϕ , nel modello M alla valutazione v ($\|\phi\|_{M,v}^A$) è induttivamente definito come segue:

- Se ϕ è una variabile x , allora $\|x\|_{M,v}^A = v(x)$.
- Se ϕ è una costante c , allora $\|c\|_{M,v}^A = m_c$.
- Se ϕ è atomica, $\|P(t_1, \dots, t_r)\|_{M,v}^A = r_P(\|t_1\|_{M,v}^A, \dots, \|t_r\|_{M,v}^A)$.
- Per ogni $\star \in \{\&, \rightarrow, \wedge\}$, $\|\varphi \star \psi\|_{M,v}^A = \|\varphi\|_{M,v}^A \star \|\psi\|_{M,v}^A$.
- $\|\forall x \varphi\|_{M,v}^A = \inf\{\|\varphi\|_{M,v'}^A \mid v' =_x v\}$.
- $\|\exists x \varphi\|_{M,v}^A = \sup\{\|\varphi\|_{M,v'}^A \mid v' =_x v\}$.

Le ultime due, sempre che l'infimo e il supremo siano definiti in A , altrimenti il valore di verità di ϕ è indefinito.

Un struttura M è detta **A-safe** se tutti gli infimi e supremi necessari a definire i valori di verità delle formule, esistono in A .

DEFINITION

I seguenti sono gli assiomi sui quantificatori:

$$(\forall 1) (\forall x\varphi(x)) \rightarrow \varphi(t) \text{ (con } t \text{ termine sostituibile per } x \text{ in } \varphi)$$

$$(\exists 1) \varphi(t) \rightarrow (\exists x\varphi(x)) \text{ (con } t \text{ termine sostituibile per } x \text{ in } \varphi)$$

$$(\forall 2) (\forall x(\psi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\forall x\varphi)) \text{ (} x \text{ non libero in } \psi)$$

$$(\exists 2) (\forall x(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\exists x\varphi) \rightarrow \psi) \text{ (} x \text{ non libero in } \psi)$$

$$(\forall 3) (\forall x(\varphi \vee \psi)) \rightarrow ((\forall x\varphi) \vee \psi) \text{ (} x \text{ non libero in } \psi)$$

DEFINITION

Sia \mathcal{L} una \mathcal{CFL} . Il calcolo $\mathcal{L}\forall$ è dato dai seguenti assiomi e regole:

- Tutte le formule che risultano dagli assiomi di \mathcal{L} sostituendo arbitrarie formule di \mathcal{I} al posto delle variabili proposizionali.
- Gli assiomi $(\forall 1) - (\forall 3)$ e $(\exists 1), (\exists 2)$ per i quantificatori.
- La regola di Modus Ponens (da φ e $\varphi \rightarrow \psi$, deduci ψ).
- La regola di Necessitazione per \forall (da φ , deduci $\forall x\varphi$).

COMPLETEZZA ALGEBRICA

DEFINITION

Sia T una teoria su $\mathcal{L}\forall$. T è detta:

- **Consistente** se esiste almeno una formula φ , tale che $T \not\vdash_{\mathcal{L}\forall} \varphi$.
- **Completa** se per ogni coppia di formule φ, ψ , $T \vdash_{\mathcal{L}\forall} (\varphi \rightarrow \psi)$ oppure $T \vdash_{\mathcal{L}\forall} (\psi \rightarrow \varphi)$.
- **Henkin** se per ogni formula chiusa della forma $\forall x\varphi(x)$, che risulta non dimostrabile in T , allora esiste una costante c nel linguaggio di T , tale che $T \not\vdash_{\mathcal{L}\forall} \varphi(c)$.

LEMMA

(1) T è inconsistente sse $T \vdash_{\mathcal{L}\forall} \bar{0}$.

(2) T è completa sse, per ogni coppia di formule chiuse φ e ψ , $T \vdash_{\mathcal{L}\forall} (\varphi \vee \psi)$, implica che $T \vdash_{\mathcal{L}\forall} \varphi$, oppure $T \vdash_{\mathcal{L}\forall} \psi$.

Dimostrazione: **Esercizio!**

DEFINITION

Per ogni teoria T di $\mathcal{L}\forall$, sia \mathcal{A}_T l'algebra delle classi di equivalenza di formule chiuse (!) modulo T -dimostrabilità, con le usuali operazioni:
 $[\varphi]_T \rightarrow [\psi]_T = [\varphi \rightarrow \psi]_T$ etc...

LEMMA

(A) Se T è una teoria completa, allora \mathcal{A}_T è linearmente ordinata.

(B) Se T è Henkin, allora per ogni formula $\varphi(x)$ (x è la sua sola variabile libera)

$$[\forall x\varphi] = \inf_c [\varphi(c)]_T$$

$$[\exists x\varphi] = \sup_c [\varphi(c)]_T.$$

Con c che varia su tutte le costanti (simboli per...) che compaiono in T .

PROOF OF LEMMA

(A) Questa conclusione è ovvia, dato che $[\varphi]_T \leq [\psi]_T$ sse $[\varphi]_T \rightarrow [\psi]_T = [\top]_T$ sse $[\varphi \rightarrow \psi]_T = [\top]_T$ sse $T \vdash_{\mathcal{L}\forall} (\varphi \rightarrow \psi)$.

(B) Per l'assioma $(\forall 1)$, e ragionando come in (A), è ovvio che $[\forall x\varphi]_T \leq [\varphi(c)]_T$ per ogni c , quindi

$$[\forall x\varphi]_T \leq \inf\{[\varphi(c)]_T \mid c \ll T\}.$$
 (1)

Rimane da mostrare l'altra disuguaglianza. A tal fine, assumiamo per assurdo che esista una formula γ tale che $[\gamma]_T \leq [\varphi(c)]_T$ per ogni $c \ll T$, ma $[\gamma]_T \not\leq [\forall x\varphi]_T$. Ne consegue che $T \not\vdash_{\mathcal{L}\forall} (\gamma \rightarrow \forall x\varphi)$, quindi (per $(\forall 2)$) $T \not\vdash_{\mathcal{L}\forall} \forall x(\gamma \rightarrow \varphi)$ ², e quindi, dato che T è di Henkin, esiste un $c' \ll T$ tale che $T \not\vdash_{\mathcal{L}\forall} (\gamma \rightarrow \varphi(c'))$, e quindi $[\gamma]_T \not\leq [\varphi(c')]_T$. Contraddizione. Quindi $[\forall x\varphi]_T = \inf_c [\varphi(c)]_T$

Il caso per \exists è analogo ed omissis.

¹ $c \ll T$ significa che c è una costante che occorre in almeno una formula di T .

²Se T dimostrasse $\forall x(\gamma \rightarrow \varphi)$, da $(\forall 2)$ e con un MP, otterremmo $\gamma \rightarrow \forall x\varphi$. 

LEMMA

Per ogni teoria T ed ogni formula chiusa φ , se $T \not\vdash_{\mathcal{L}\forall} \varphi$, allora esiste una teoria Henkin e completa T' tale che $T' \supseteq T$, e $T' \not\vdash_{\mathcal{L}\forall} \varphi$.

LEMMA

Per ogni teoria T Henkin e completa, ed ogni formula chiusa φ non dimostrabile in T , esiste una \mathcal{L} -catena A , ed una A -struttura M di T tale che $\|\varphi\|_M^A < 1$.

DIM: Definiamo M (l'universo del modello) come l'insieme di tutte le costanti $c \ll T$, e $m_c = c$ per ognuna di tali costanti.

Sia A_T la \mathcal{L} -catena delle classi di equivalenza delle formule modulo T -dimostrabilità.

Per un precedente lemma, A_T è effettivamente una \mathcal{L} -catena.

Per ogni predicato P di arietà r , sia $r_P(c_1, \dots, c_r) = [P(c_1, \dots, c_r)]_T$.

Questo completa la definizione del modello M . Rimane da dimostrare che, per ogni formula chiusa φ , $\|\varphi\|_M^A = [\varphi]_T$.

Per ogni assioma α , $\|\alpha\|_M^{A_T} = [\alpha]_T = [\top]_T = 1_A$. Inoltre

$\|\varphi\|_M^{A_T} = [\varphi]_T \neq [\top]_T = 1_A$.

Se α è una formula atomica chiusa, allora la conclusione segue dalla definizione data in precedenza. Inoltre è facile vedere che la tesi segue per le formule definite con il solo uso di connettivi logici.

Per quanto riguarda i quantificatori osserviamo che:

$$\|\forall x\alpha(x)\|_M^{A_T} = \inf_c \{\|\alpha(c)\|_M^{A_T}\} = \inf_c \{[\alpha(c)]_T\} = [\forall x\alpha(x)]_T.$$

Dove:

- La prima uguaglianza segue dal fatto che ogni elemento di M coincide con un simbolo per costante (se stesso!), pertanto ogni variabile viene valutata in una costante (in altre parole per ogni x ed ogni v esiste una c , $v(x) = c$).
- La seconda uguaglianza segue per il passo induttivo.
- La terza è assicurata da un Lemma precedente.

THEOREM

Sia $T \cup \varphi$ una teoria arbitraria su $\mathcal{L}\forall$ nel linguaggio \mathcal{I} . Le seguenti sono equivalenti:

- $T \vdash_{\mathcal{L}\forall} \varphi$,
- Per ogni \mathcal{L} -catena A ed ogni A -modello safe M , $\|\varphi\|_M^A = 1_A$.

Come notazione, d'ora in avanti scriveremo anche $(M, A) \models \varphi$, ad indicare che $\|\varphi\|_M^A = 1$.

COMPLETEZZA STANDARD

Ricordiamo che, nel caso proposizionale la completezza di una $CF\mathcal{L}$ \mathcal{L} rispetto ad una classe di strutture \mathbb{K} viene solitamente dimostrata via proprietà di immersione (parziale) delle algebre:

\mathcal{L} ha la $FS\mathbb{K}C$ allora ogni \mathcal{L} -catena è parzialmente immergibile in \mathbb{K} .

\mathcal{L} ha la $S\mathbb{K}C$ allora ogni \mathcal{L} -catena è immergibile in \mathbb{K} .

In particolare ricordiamo i casi interessanti, quando $\mathbb{K} = \mathcal{R}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}^*$.

Nuovamente ricordiamo i passi base della dimostrazione (ad esempio per la SRC).

- Sia $T \cup \{\varphi\}$ una teoria su \mathcal{L} , tale che $T \not\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.
- Per la completezza algebrica (catene) esiste una valutazione e su una \mathcal{L} -catena A tale che $e(t) = 1$, per ogni $t \in T$, e $e(\varphi) < 1$.
- Sia $X = \{e(\psi) \mid \psi \text{ è sottoformula di } T \cup \{\varphi\}\}$, e chiamiamo A_X la sottoalgebra contabile di A generata da X .
- Potendo immergere A in un'algebra $B \in \mathbb{K}$ via una mappa f , abbiamo che la composizione $f \circ e : \text{Form} \rightarrow B$ è una valutazione η tale che:

$$\eta(t) = 1 \text{ per ogni } t \in T, \text{ e } \eta(\varphi) < 1.$$

DOMANDA: A cosa serve richiedere che f sia una immersione? In particolare a cosa serve chiedere che f sia un morfismo?

Nuovamente ricordiamo i passi base della dimostrazione (ad esempio per la SRC).

- Sia $T \cup \{\varphi\}$ una teoria su \mathcal{L} , tale che $T \not\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.
- Per la completezza algebrica (catene) esiste una valutazione e su una \mathcal{L} -catena A tale che $e(t) = 1$, per ogni $t \in T$, e $e(\varphi) < 1$.
- Sia $X = \{e(\psi) \mid \psi \text{ è sottoformula di } T \cup \{\varphi\}\}$, e chiamiamo A_X la sottoalgebra contabile di A generata da X .
- Potendo immergere A in un'algebra $B \in \mathbb{K}$ via una mappa f , abbiamo che la composizione $f \circ e : \text{Form} \rightarrow B$ è una valutazione η tale che:

$$\eta(t) = 1 \text{ per ogni } t \in T, \text{ e } \eta(\varphi) < 1.$$

DOMANDA: A cosa serve richiedere che f sia una immersione? In particolare a cosa serve chiedere che f sia un morfismo?

RISPOSTA: Serve ad assicurare che la composizione $f \circ e$ sia una valutazione, e quindi commuti con gli operatori dell'algebra: ad esempio $f \circ e(\varphi \& \psi) = f(e(\varphi \& \psi)) = f(e(\varphi) \& e(\psi)) = f(e(\varphi)) \& f(e(\psi))$.

DOMANDA: e per quanto riguarda il primo ordine? Quale proprietà sarà necessaria per dimostrare che una logica $\mathcal{L}\forall$ soddisfa (ad esempio) la SKC ?

DOMANDA: e per quanto riguarda il primo ordine? Quale proprietà sarà necessaria per dimostrare che una logica $\mathcal{L}\forall$ soddisfa (ad esempio) la SKC ?

DEFINITION

Siano A e B due algebre dello stesso tipo e assumiamo che abbiano operatori reticolari (definibili). Diciamo che una immersione $f : A \rightarrow B$ è una σ -immersione se

$$f(\sup(C)) = \sup(f[C]) \text{ e } f(\inf(D)) = \inf(f[D])$$

per sottoinsiemi C e D di A numerabili, e tali che $\sup(C)$ e $\inf(D)$ esistano in A .

Ovvero f è una σ -immersione se è una immersione che preserva tutti gli infimi e supremi esistenti in A .

THEOREM

Sia \mathcal{L} una CFL. Allora le seguenti sono equivalenti:

- Per ogni \mathcal{L} -catena contabile ed ogni modello contabile (M, A) (per il linguaggio predicativo \mathcal{I}), esiste una \mathcal{L} -catena $B \in \mathbb{K}$ ed un modello (M', B) , tale che (M, A) è elementarmente immergibile in (M', B) via una coppia (f, g) tale che f è un isomorfismo.
- Ogni \mathcal{L} -catena contabile A si σ -immerge in qualche \mathcal{L} -catena $B \in \mathbb{K}$

DIMOSTRAZIONE: Si veda

CEGGMN09 CINTULA P., ESTEVA F., GODO L., MONTAGNA F., NOGUERA C., *Distinguished Algebraic Semantics for T-norm Based Fuzzy Logics: Methods and Algebraic Equivalencies*. APAL 2009.

COROLLARY

La proprietà della σ immersione relativamente ad una classe di \mathcal{L} -catene contabili \mathbb{K} , implica la SKC per $\mathcal{L}\forall$.

Relativamente a completezza Reale, Razionale ricordiamo qualche risultato specifico:

	RC	FSRC	SRC	QC	FSQC	SQC
$MTL\forall$	si	si	si	si	si	si
$IMTL\forall$	si	si	si	si	si	si
$SMTL\forall$	si	si	si	si	si	si
$\Pi MTL\forall$?	no	no	?	?	?
$\exists\forall$	no	no	no	si	si	si
$BL\forall$	no	no	no	no	no	no
$\Pi\forall$	no	no	no	si	si	si
$G\forall$	si	si	si	si	si	si
$CPC\forall$	no	no	no	no	no	no

Ricordiamo il seguente:

LEMMA

Sia \mathcal{L} una CFL, le seguenti sono equivalenti:

- $\mathcal{L} \forall$ soddisfa SR^*C ,
- $\mathcal{L} \forall$ soddisfa SQC .

COROLLARY

La proprietà della σ -immersione in \mathbb{K} non caratterizza la $S\mathbb{K}C$.