

# PRINCIPALI ESPANSIONI DELLE LOGICHE BASATE SU T-NORME

Tommaso Flaminio

Università di Siena

June 4, 2009

## 1 IL $\Delta$ DI BAAZ E INVOLUZIONI

## 2 I RAZIONALI

- La completezza alla “Pavelka”

## 3 MODALITÀ PROBABILISTICHE

## IL $\Delta$ DI BAAZ E INVOLUZIONI

Sia  $\mathcal{L}$  una  $\mathcal{CFL}$ . La logica  $\mathcal{L}_\Delta$  si ottiene aggiungendo ad  $\mathcal{L}$  i seguenti assiomi per  $\Delta$ :

$$(\Delta 1) \quad \Delta\varphi \vee \neg\Delta\varphi$$

$$(\Delta 2) \quad \Delta(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Delta\varphi \vee \Delta\psi)$$

$$(\Delta 3) \quad \Delta\varphi \rightarrow \varphi$$

$$(\Delta 4) \quad \Delta\varphi \rightarrow \Delta\Delta\varphi$$

$$(\Delta 5) \quad \Delta(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Delta\varphi \rightarrow \Delta\psi)$$

e la regola di necessitazione per il  $\Delta$  (da  $\varphi$ , deduci  $\Delta\varphi$ ).

Una  $\mathcal{L}_\Delta$ -algebra è un'algebra  $A = (A, \Delta)$  tale che,

- $A$  è una  $\mathcal{L}$ -algebra,
- $\Delta$  soddisfa le equazioni  $(\Delta i) = 1^A$  (per ogni  $i = 1, \dots, 5$ ) e  $\Delta(1^A) = 1^A$

(d'ora in avanti sciveremo 1 invece di  $1^A$  senza pericolo di confondere le notazioni).

La semantica standard per  $\Delta$  è la seguente: per ogni  $x \in [0, 1]$ ,  $\Delta(x) = 1$  se  $x = 1$ ,  $\Delta(x) = 0$  altrimenti.

Quindi una  $\mathcal{L}_\Delta$ -algebra  $(A, \Delta)$  è detta **standard** se  $A$  è una  $\mathcal{L}$ -algebra standard e  $\Delta$  è la semantica standard per il connettivo  $\Delta$  (ovvero per ogni  $x \in A$ ,  $\Delta(x) = 1$  se  $x = 1$ ,  $\Delta(x) = 0$  altrimenti).

Risultati noti per  $\Delta$ -espansioni.

- $\mathcal{L}_\Delta$  soddisfa il teorema di  $\Delta$ -deduzione:

$$T \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}_\Delta} \psi \text{ sse } T \vdash_{\mathcal{L}_\Delta} \Delta\varphi \rightarrow \psi.$$

- $\mathcal{L}_\Delta$  è estensione conservativa di  $\mathcal{L}$ .
- Se  $\mathcal{L}$  soddisfa  $(F)S\mathbb{K}C$ , allora  $\mathcal{L}_\Delta$  soddisfa  $(F)S\mathbb{K}C$

Sia  $\mathcal{L}_\Delta$  la  $\Delta$ -espansione di una  $\mathcal{CFL}$ . Indichiamo con  $\mathcal{L}_\sim$  l'espansione ottenuta aggiungendo al linguaggio di  $\mathcal{L}_\Delta$  un nuovo connettivo unario  $\sim$  e assiomi:

$$(\sim 1) \quad \sim\sim\varphi \leftrightarrow \varphi$$

$$(\sim 2) \quad \Delta(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\sim\psi \rightarrow \sim\varphi).$$

Non aggiungiamo alcuna regola di deduzione:  $\mathcal{L}_\sim$  ha modus ponens e  $\Delta$  necessitazione.

Una  $\mathcal{L}_\sim$ -algebra è un'algebra  $A = (A, \sim)$  tale che  $A$  è una  $\mathcal{L}_\Delta$ -algebra e  $\sim$  soddisfa le equazioni  $(\sim 1) = 1$  e  $(\sim 2) = 1$

La semantica **standard** per  $\sim$  è la seguente: per ogni  $x \in [0, 1]$ ,  
 $\sim x = 1 - x$ .

La semantica **semi-standard** per  $\sim$  è la seguente:  $\sim$  è una involuzione ( $\sim\sim x = x$  per ogni  $x \in [0, 1]$ ) e  $\sim$  inverte l'ordine (se  $x \leq y$ , allora  $\sim y \leq \sim x$ ).

## DEFINITION

Una  $\mathcal{L}_\sim$ -algebra  $(A, \sim)$  è detta:

- **Standard** se  $A$  è una  $\mathcal{L}_\Delta$ -algebra standard e, per ogni  $x \in A$ ,  
 $\sim x = 1 - x$ .
- **Semistandard** se  $A$  è una  $\mathcal{L}_\Delta$ -algebra standard e  $\sim$  è una involuzione su  $A$  che inverte l'ordine.

## Risultati per $\sim$ -estensioni:

- In ogni logica  $\mathcal{L}_\sim$  si può definire il connettivo di t-conorma  $\oplus$  come  $\varphi \oplus \psi \leftrightarrow \sim (\sim \varphi \& \sim \psi)$ .
- $\mathcal{L}_\sim$  è una estensione conservativa di  $\mathcal{L}_\Delta$  e quindi lo è di  $\mathcal{L}$ .
- $\mathcal{L}_\sim$  soddisfa il teorema di  $\Delta$ -deduzione.
- Se  $\mathcal{L}$  soddisfa  $(F)SRC$ , allora  $\mathcal{L}_\sim$  soddisfa  $(F)SRC$  dove  $\sim$  ha una interpretazione semistandard. Ovvero  $\mathcal{L}_\sim$  soddisfa **semi - (F)SRC**
- Se  $\mathcal{L}$  non è  $\perp$  o  $\Pi$  e  $\mathcal{L}$  soddisfa  $(F)SRC$ , allora  $\mathcal{L}_\sim$  soddisfa  $(F)SRC$  dove  $\sim$  ha la sua interpretazione **standard**
- Se  $\mathcal{L}$  ha una negazione  $\neg$  tale che  $\neg x = 1$  se  $x = 0$  e  $\neg x = 0$  altrimenti (ad esempio se  $\mathcal{L}$  è  $G$  oppure  $\Pi$ ), allora  $\sim$  può essere introdotta senza il  $\Delta$ , ma definendo  $\Delta x$  come  $\neg \sim x$ .
- Per ogni  $\mathcal{L}$ , in  $\mathcal{L}_{\forall \sim}$  il quantificatore  $\forall$  è definibile da  $\exists$  e viceversa. Ovvero  $\vdash_{\mathcal{L}_{\forall \sim}} (\forall x \varphi) \leftrightarrow (\sim \exists x \sim \varphi)$

# I RAZIONALI

**Idea:** estendere il linguaggio di una logica  $\mathcal{L}$  in  $\mathcal{CF}\mathcal{L}$  con delle costanti  $\bar{r}$ , per ogni  $r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ .

In tal modo possiamo portare la semantica dentro la sintassi ed aumentare il potere espressivo della logica: da  $\mathcal{L}$  a  $\mathbb{Q}\mathcal{L}$ .

La prima logica ad essere estesa con razionali è la logica di Łukasiewicz: la logica **Razionale di Pavelka** ( $\mathbb{Q}\mathbb{L}$ ) **RPL** in simboli è ottenuta aggiungendo le costanti  $\bar{r}$  (per ogni  $r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ) al linguaggio di  $\mathbb{L}$  e assiomatizzando le  $\bar{r}$  con i seguenti:

**Assiomi di Bookkeeping** (assiomi di contabilità):

- $\bar{r} \oplus \bar{s} \leftrightarrow \overline{\min\{1, r + s\}}$
- $\neg \bar{r} \leftrightarrow \overline{1 - r}$ .

In generale: Sia  $\mathcal{L}$  una  $\mathcal{CF}\mathcal{L}$  e sia  $A = ([0, 1], \&^A, \rightarrow^A, \leq^A, 0^A, 1^A)$  una  $\mathcal{L}$ -algebra. Allora definiamo  $\mathbb{Q}\mathcal{L}$  come la logica che si ottiene da  $\mathcal{L}$  aggiungendo le costanti  $\bar{r}$  e i seguenti assiomi di bookkeeping

$$\bar{r} \& \bar{s} \leftrightarrow \overline{r \&^A s} \text{ e } \bar{r} \rightarrow \bar{s} \leftrightarrow \overline{r \rightarrow^A s}$$

# COMPLETEZZA ALLA “PAVELKA”

Quando il linguaggio di una logica (sempre nel senso di  $\mathcal{CFL}$ ) ha simboli per (o permette di definire) costanti razionali  $\bar{r}$ , possiamo parlare di Completezza alla Pavelka:

## DEFINITION

Sia  $T$  una teoria su  $\mathbb{QL}$  e sia  $\varphi$  una formula nel linguaggio di  $\mathbb{QL}$ .  
Definiamo:

- Il **Grado di Dimostrabilità** di  $\varphi$  in  $T$  (e lo indichiamo con  $|\varphi|_T$ ) come

$$|\varphi|_T = \sup\{r \in \mathbb{Q} : T \vdash_{\mathbb{QL}} \bar{r} \rightarrow \varphi\}.$$

- Il **Grado di Verità** di  $\varphi$  in  $T$  (e lo indichiamo con  $\|\varphi\|_T$ ) come:

$$\|\varphi\|_T = \inf\{e(\varphi) : \forall t \in T, e(t) = 1\}.$$

Diciamo che una logica  $\mathbb{Q}\mathcal{L}$  ha la completezza alla Pavelka, se per ogni  $T \cup \{\varphi\}$ ,

$$\|\varphi\|_T = |\varphi|_T.$$

Notare che la completezza alla Pavelka è una completezza **forte**, nel senso che non ci sono imposizioni sulla cardinalità di  $T$ .

La logica RPL (ovvero  $\mathbb{Q}\mathbb{L}$ ) soddisfa la completezza alla Pavelka.

Per le altre logiche vale un teorema di completezza algebrico **non canonico** (semi-standard): ogni  $\mathcal{L}$  che non sia Łukasiewicz, è  $(F)SRC$  relativamente ad algebre  $(A, \&, \rightarrow, \leq, \{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}, 0, 1)$  dove:

- $(A, \&, \rightarrow, \leq, 0, 1)$  è una  $\mathcal{L}$ -algebra standard
- $R = \{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  è un sottoinsieme numerabile e densamente ordinato di  $A = [0, 1]$

Se  $R$  coincide con  $\mathbb{Q}$ , allora parliamo di completezza algebrica **canonica**. L'unica logica ad avere la completezza canonica è Łukasiewicz (e le sue estensioni continue: se una logica ha connettivi discontinui (come ad esempio  $\Delta$ ), la completezza alla Pavelka salta).

# MODALITÀ PROBABILISTICHE

La logica  $FP(C, \mathbb{L})$  è ottenuta aggiungendo al linguaggio della logica di Łukasiewicz una modalità unaria  $Pr$  (da leggersi **probabilmente**).

Le formule di  $FP(C, \mathbb{L})$  si dividono in:

- (CF) Formule non modali: Tali sono le formule induttivamente definite da: ogni variabile proposizionale  $p_i$  è una formula non modale, se  $\varphi$  e  $\psi$  sono non modali, allora  $\varphi \wedge \psi$  e  $\neg\varphi$  sono non modali,  $\bar{0}$  è non modale.
- (MF) Le formule modali: per ogni  $\varphi$  formula non modale,  $Pr(\varphi)$  è modale,  $\bar{0}$  è modale, e la classe delle formule modali è chiusa rispetto ai connettivi di  $\mathbb{L}$ .

**N.B.** in questa formulazione, non è ammesso l'uso annidato della modalit   $Pr$ , n  tantomeno sono ammesse formule del tipo  $\psi \& Pr(\gamma)$  dove  $\psi$    non modale. **In definitiva, n   $Pr(Pr(\varphi) \rightarrow \psi)$ , n   $\psi \rightarrow Pr(\varphi)$  sono w.f.f.** Quindi la logica  $FP(C, \mathbb{L})$  **NON**   algebrizzabile nel senso di Blok e Pigozzi, infatti  $Pr$ , algebricamente, si comporta come un operatore parziale, e non come un operatore sull'algebra.

Gli assiomi e regole di  $FP(C, \perp)$  sono i seguenti:

- Tutti gli assiomi e regole della logica classica, ristretti alle formule non modali.
- Tutti gli assiomi e regole della logica di Łukasiewicz per le formule modali.
- I seguenti assiomi per Pr:
  - $\text{Pr}(\neg\varphi) \leftrightarrow \neg\text{Pr}(\varphi)$
  - $\text{Pr}(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\text{Pr}(\varphi) \rightarrow \text{Pr}(\psi))$
  - $\text{Pr}(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow [(\text{Pr}(\varphi) \rightarrow \text{Pr}(\varphi \wedge \psi)) \rightarrow \text{Pr}(\psi)]$
- La regola di necessitazione per Pr: da  $\varphi$ , deduci  $\text{Pr}(\varphi)$ .

Modelli per  $FP(C, \perp)$  sono modelli alla Kripke del tipo  $K = (W, e, \mu)$  tali che:

- $W$  è un insieme non vuoto di mondi possibili,
- $e : Var \times W \rightarrow \{0, 1\}$  è, per ogni fissato mondo  $w$ , una mappa che valuta le variabili in  $\{0, 1\}$  (e che si estende banalmente ad una valutazione booleana)
- $\mu : B \subseteq \mathcal{P}(W) \rightarrow [0, 1]$  è una misura di probabilità finitamente (!) additiva, tale che, per ogni  $\varphi$  non modale,  
 $\varphi_W = \{w \in W : e(w, \varphi) = 1\}$  sia  $\mu$ -misurabile (cioè  $\varphi_W \in B$ ).

Sia  $\phi$  una formula, sia  $K$  un modello probabilistico di Kripke, e sia  $w \in W$ . Allora il **valore di verità di  $\phi$  in  $W$  al mondo  $w$**  (e lo indichiamo con  $\|\phi\|_{K,w}$ ) è induttivamente definito con:

- Se  $\phi$  è non modale, allora  $\|\phi\|_{K,w} = e(w, \phi)$ .
- Se  $\phi = \text{Pr}(\psi)$  è modale atomica, allora  $\|\text{Pr}(\psi)\|_{K,w} = \mu(\psi_W)$ .
- Se  $\phi$  è modale non atomica allora utilizziamo la vero-funzionalità dei connettivi di Łukasiewicz.

## Risultati in cronologia:

- 1996 Hájek, Esteva e Godo introducono la logica  $FP(C, \perp)$  e ne dimostrano la completezza rispetto ai modelli di Kripke.
- 1998 Hájek estende la logica  $FP(C, \perp)$  con costanti razionali. Introduce la logica  $FP(C, RPL)$  e ne dimostra completezza e completezza alla Pavelka.
- 2001 Hájek e Tulipani dimostrano che la complessità dell'insieme delle formule soddisfacibili di  $FP(C, \perp)$  e  $FP(C, RPL)$  è NP-completo. Le tautologie sono coNP-complete.
- 2003 F. e Montagna caratterizzano la coerenza definettiana modulo la consistenza di teorie su  $FP(C, RPL)$  e introducono la logica  $FP(C, S\perp\Pi)$  per la probabilità condizionata (complessità PSPACE).
- 2004 Godo e Marchioni introducono una seconda logica per trattare la probabilità condizionale ( $FCP(C, \perp\Pi)$ ), (complessità PSPACE)
- 2007 F. introduce una terza logica per la probabilità condizionata  $FP_k(C, R\perp\Delta)$  (complessità NP-completo). Si dimostra che testare la coerenza di assegnamenti di probabilità condizionata è NP-completo.

- 2007 F. e Godo introducono le logiche  $FP(\mathbb{L}_n, \mathbb{L})$ ,  $FP(\mathbb{L}, \mathbb{L})$  e  $FCP(\mathbb{L}, RPL)$  per la probabilità e la probabilità condizionata su eventi a più valori. Dimostriamo completezza per  $FP(\mathbb{L}_n, \mathbb{L})$  e completezza alla Pavelka per  $FCP(\mathbb{L}, RPL)$ . La completezza standard di  $FP(\mathbb{L}, \mathbb{L})$  è aperto!
- 2008 Hájek dimostra che la soddisfacibilità di  $FP(\mathbb{L}_n, \mathbb{L})$  è NP-completo, mentre quella di  $FP(\mathbb{L}, \mathbb{L})$  è PSPACE.
- 2008 F. dimostra una completezza iperreale per  $FP(\mathbb{L}, \mathbb{L})$ .
- 2009 F. e Montagna introducono la logica  $SFP(\mathbb{L}, \mathbb{L})$ . Estensione algebrizzabile di  $FP(\mathbb{L}, \mathbb{L})$  e dimostrano completezza rispetto alla classe delle SMV-algebre.
- 2009 F. e Bova dimostrano che la soddisfacibilità di  $SFP(\mathbb{L}, \mathbb{L})$  (e quindi anche quella di  $FP(\mathbb{L}, \mathbb{L})$ ) è NP-completo.