Principali espansioni delle logiche basate su t-norme

Tommaso Flaminio

Università di Siena

June 4, 2009

1. Il Δ di Baaz e Involuzioni

2. I Razionali
   - La completezza alla “Pavelka”

3. Modalità probabilistiche

Il Δ di Baaz e Involuzioni

Sia $\mathcal{L}$ una $\mathcal{CFL}$. La logica $\mathcal{L}_\Delta$ si ottiene aggiungendo ad $\mathcal{L}$ i seguenti assiomi per Δ:

(Δ1) $\Delta\varphi \vee \neg\Delta\varphi$

(Δ2) $\Delta(\varphi \vee \psi) \to (\Delta\varphi \vee \Delta\psi)$

(Δ3) $\Delta\varphi \to \varphi$

(Δ4) $\Delta\varphi \to \Delta\Delta\varphi$

(Δ5) $\Delta(\varphi \to \psi) \to (\Delta\varphi \to \Delta\psi)$

e la regola di necessitazione per il Δ (da φ, deduci $\Delta\varphi$).

Una $\mathcal{L}_\Delta$-algebra è un'algebra $A = (A, \Delta)$ tale che,

- A è una $\mathcal{L}$-algebra,
- Δ soddisfa le equazioni $(\Delta i) = 1^A$ (per ogni $i = 1, \ldots, 5$) e $\Delta(1^A) = 1^A$

(d'ora in avanti sciveremo 1 invece di 1^A senza pericolo di confondere le notazioni).

La semantica standard per Δ è la seguente: per ogni $x \in [0,1]$, $\Delta(x) = 1$ se $x = 1$, $\Delta(x) = 0$ altrimenti.

Quindi una $\mathcal{L}_\Delta$-algebra (A, Δ) è detta standard se A è una $\mathcal{L}$-algebra standard e Δ è la semantica standard per il connettivo Δ (ovvero per ogni $x \in A$, $\Delta(x) = 1$ se $x = 1$, $\Delta(x) = 0$ altrimenti).

Risultati noti per Δ-espansioni.

- $\mathcal{L}_\Delta$ soddisfa il teorema di Δ-deduzione:

$$T \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}_\Delta} \psi \text{ sse } T \vdash_{\mathcal{L}_\Delta} \Delta\varphi \to \psi.$$

- $\mathcal{L}_\Delta$ è estensione conservativa di $\mathcal{L}$.
- Se $\mathcal{L}$ soddisfa $(F)S\mathbb{K}C$, allora $\mathcal{L}_\Delta$ soddisfa $(F)S\mathbb{K}C$

Sia $\mathcal{L}_\Delta$ la Δ-espansione di una $\mathcal{CFL}$. Indichiamo con $\mathcal{L}_\sim$ l'espansione ottenuta aggiungendo al linguaggio di $\mathcal{L}_\Delta$ un nuovo connettivo unario $\sim$ e assiomi:

(~ 1) $\sim\sim \varphi \leftrightarrow \varphi$

(~ 2) $\Delta(\varphi \to \psi) \to (\sim \psi \to \sim \varphi)$.

Non aggiungiamo alcuna regola di deduzione: $\mathcal{L}_\sim$ ha modus ponens e Δ necessitazione.

Una $\mathcal{L}_\sim$-algebra è un'algebra $A = (A, \sim)$ tale che A è una $\mathcal{L}_\Delta$-algebra e $\sim$ soddisfa le equazioni $(\sim 1) = 1$ e $(\sim 2) = 1$

La semantica standard per $\sim$ è la seguente: per ogni $x \in [0,1]$, $\sim x = 1 - x$.

La semantica semi-standard per $\sim$ è la seguente: $\sim$ è una involuzione ($\sim\sim x = x$ per ogni $x \in [0,1]$) e $\sim$ inverte l'ordine (se $x \leq y$, allora $\sim y \leq \sim x$).

Definition

Una $\mathcal{L}_{\sim}$-algebra $(A, \sim)$ è detta:

- Standard se A è una $\mathcal{L}_{\Delta}$-algebra standard e, per ogni $x \in A$, $\sim x = 1 - x$.
- Semistandard se A è una $\mathcal{L}_{\Delta}$-algebra standard e $\sim$ è una involuzione su A che inverte l'ordine.

Risultati per $\sim$-estensioni:

- In ogni logica $\mathcal{L}_\sim$ si può definire il connettivo di t-conorma $\oplus$ come $\varphi \oplus \psi \leftrightarrow \sim (\sim \varphi \& \sim \psi)$.
- $\mathcal{L}_\sim$ è una estensione conservativa di $\mathcal{L}_\Delta$ e quindi lo è di $\mathcal{L}$.
- $\mathcal{L}_\sim$ soddisfa il teorema di Δ-deduzione.
- Se $\mathcal{L}$ soddisfa $(F)\mathcal{SRC}$, allora $\mathcal{L}_\sim$ soddisfa $(F)\mathcal{SRC}$ dove $\sim$ ha una interpretazione semistandard. Ovvero $\mathcal{L}_\sim$ soddisfa $semi-(F)\mathcal{SRC}$
- Se $\mathcal{L}$ non è Ł o Π e $\mathcal{L}$ soddisfa $(F)\mathcal{SRC}$, allora $\mathcal{L}_\sim$ soddisfa $(F)\mathcal{SRC}$ dove $\sim$ ha la sua interpretazione standard
- Se $\mathcal{L}$ ha una negazione $\neg$ tale che $\neg x = 1$ se $x = 0$ e $\neg x = 0$ altrimenti (ad esempio se $\mathcal{L}$ è G oppure Π), allora $\sim$ può essere introdotta senza il Δ, ma definendo Δx come $\neg \sim x$.
- Per ogni $\mathcal{L}$, in $\mathcal{L}\forall_\sim$ il quantificatore $\forall$ è definibile da $\exists$ e viceversa. Ovvero $\vdash_{\mathcal{L}\forall} (\forall x \varphi) \leftrightarrow (\sim \exists x \sim \varphi)$

I Razionali

Idea: estendere il linguaggio di una logica $\mathcal{L}$ in $\mathcal{CFL}$ con delle costanti $\overline{r}$, per ogni $r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$.
In tal modo possiamo portare la semantica dentro la sintassi ed aumentare il potere espressivo della logica: da $\mathcal{L}$ a $\mathbb{Q}\mathcal{L}$.

La prima logica ad essere estesa con razionali è la logica di Łukasiewicz: la logica Razional di Pavelka ($\mathbb{Q}$Ł) RPL in simboli è ottenuta aggiungendo le costanti $\overline{r}$ (per ogni $r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$) al linguaggio di Ł e assiomatizzando le $\overline{r}$ con i seguenti:

Assiomi di Bookkeeping (assiomi di contabilità):

- $\overline{r} \oplus \overline{s} \leftrightarrow \overline{\min\{1, r+s\}}$
- $\neg\overline{r} \leftrightarrow \overline{1-r}$.

In generale: Sia $\mathcal{L}$ una $\mathcal{CFL}$ e sia $A = ([0,1], \&^A, \to^A, \leq^A, 0^A, 1^A)$ una $\mathcal{L}$-algebra. Allora definiamo $\mathbb{Q}\mathcal{L}$ come la logica che si ottiene da $\mathcal{L}$ aggiungendo le costanti $\overline{r}$ e i seguenti assiomi di bookkeeping

$$\overline{r}\&\overline{s} \leftrightarrow \overline{r\&^A s} \text{ e } \overline{r} \to \overline{s} \leftrightarrow \overline{r \to^A s}$$

Completezza alla "Pavelka"

Quando il linguaggio di una logica (sempre nel senso di $\mathcal{CFL}$) ha simboli per (o permette di definire) costanti razionali $\bar{r}$, possiamo parlare di Completezza alla Pavelka:

Definition

Sia T una teoria su $\mathbb{Q}\mathcal{L}$ e sia φ una formula nel linguaggio di $\mathbb{Q}\mathcal{L}$. Definiamo:

- Il Grado di Dimostrabilità di φ in T (e lo indichiamo con $|\varphi|_T$) come

$$|\varphi|_T = \sup\{r \in \mathbb{Q} : T \vdash_{\mathbb{Q}\mathcal{L}} \bar{r} \to \varphi\}.$$

- Il Grado di Verità di φ in T (e lo indichiamo con $\|\varphi\|_T$) come:

$$\|\varphi\|_T = \inf\{e(\varphi) : \forall t \in T, e(t) = 1\}.$$

Diciamo che una logica $\mathbb{Q}\mathcal{L}$ ha la completezza alla Pavelka, se per ogni $T \cup \{\varphi\}$,

$$\|\varphi\|_T = |\varphi|_T.$$

Notare che la completezza alla Pavelka è una completezza forte, nel senso che non ci sono imposizioni sulla cardinalità di T.

La logica RPL (ovvero $\mathbb{Q}$Ł) soddisfa la completezza alla Pavelka.
Per le altre logiche vale un teorema di completezza algebrico non canonico (semi-standard): ogni $\mathcal{L}$ che non sia Łukasiewicz, è $(F)\mathcal{SRC}$ relativamente ad algebre $(A, \&, \to, \leq, \{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}, 0, 1)$ dove:

- $(A, \&, \to, \leq, 0, 1)$ è una $\mathcal{L}$-algebra standard
- $R = \{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è un sottoinsieme numerabile e densamente ordinato di $A = [0, 1]$

Se R coincide con $\mathbb{Q}$, allora pariamo di completezza algebrica canonica.
L'unica logica ad avere la completezza canonica è Łukasiewicz (e le sue estensioni continue: se una logica ha connettivi discontinui (come ad esempio Δ), la completezza alla Pavelka salta).

Modalità probabilistiche

La logica $FP(C, Ł)$ è ottenuta aggiungendo al linguaggio della logica di Łukasiewicz una modalità unaria Pr (da leggersi probabilmente).

Le formule di $FP(C, Ł)$ si dividono in:

(CF) Formule non modali: Tali sono le formule induttivamente definite da: ogni variabile proposizionale p_i è una formula non modale, se φ e ψ sono non modali, allora $\varphi \wedge \psi$ e $\neg\varphi$ sono non modai, $\overline{0}$ è non modale.

(MF) Le formule modali: per ogni φ formula non modale, $\Pr(\varphi)$ è modale, $\overline{0}$ è modale, e la classe delle formule modali è chiusa rispetto ai connettivi di Ł.

N.B. in questa formulazione, non è ammesso l'uso annidiato della modalità Pr, né tantomeno sono ammesse formule del tipo $\psi \& \Pr(\gamma)$ dove ψ è non modale. In definitiva, né $\Pr(\Pr(\varphi) \to \psi)$, né $\psi \to \Pr(\varphi)$ sono w.f.f. Quindi la logica $FP(C, Ł)$ NON è algebrizzabile nel senso di Blok e Pigozzi, infatti Pr, algebricamente, si comporta come un operatore parziale, e non come un operatore sull'algebra.

Gli assiomi e regole di $FP(C, Ł)$ sono i seguenti:

- Tutti gli assiomi e regole della logica classica, ristretti alle formule non modali.
- Tutti gli assiomi e regole della logica di Łukasiewicz per le formule modali.
- I seguenti assiomi per Pr:
  - $\mathrm{Pr}(\neg\varphi) \leftrightarrow \neg\,\mathrm{Pr}(\varphi)$
  - $\mathrm{Pr}(\varphi \to \psi) \to (\mathrm{Pr}(\varphi) \to \mathrm{Pr}(\psi))$
  - $\mathrm{Pr}(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow [(\mathrm{Pr}(\varphi) \to \mathrm{Pr}(\varphi \wedge \psi)) \to \mathrm{Pr}(\psi)]$
- La regola di necessitazione per Pr: da φ, deduci $\mathrm{Pr}(\varphi)$.

Modelli per $FP(C, Ł)$ sono modelli alla Kripke del tipo $K = (W, e, \mu)$ tali che:

- W è un insieme non vuoto di mondi possibili,
- $e : Var \times W \to \{0, 1\}$ è, per ogni fissato mondo w, una mappa che valuta le variabili in $\{0, 1\}$ (e che si estende banalemnte ad una valutazione booleana)
- $\mu : B \subseteq \mathcal{P}(W) \to [0, 1]$ è una misura di probabilità finitamente (!) additiva, tale che, per ogni φ non modale, $\varphi_W = \{w \in W : e(w, \varphi) = 1\}$ sia μ-misurabile (cioè $\varphi_W \in B$).

Sia ϕ una formula, sia K un modello probabilistico di Kripke, e sia $w \in W$. Allora il valore di verità di ϕ in W al mondo w (e lo indichiamo con $\|\phi\|_{K,w}$) è induttivamente definito con:

- Se ϕ è non modale, allora $\|\phi\|_{K,w} = e(w, \phi)$.
- Se $\phi = \Pr(\psi)$ è modale atomica, allora $\|\Pr(\psi)\|_{K,w} = \mu(\psi_W)$.
- Se ϕ è modale non atomica allora utilizziamo la vero-funzionalità dei connettivi di Łukasiewicz.

Risultati in cronologia:

1996 Hájek, Esteva e Godo introducono la logica $FP(C, Ł)$ e ne dimostrano la completezza rispetto ai modelli di Kripke.

1998 Hájek estende la logica $FP(C, Ł)$ con costanti razionali. Introduce la logica $FP(C, RPL)$ e ne dimostra completezza e completezza alla Pavelka.

2001 Hájek e Tulipani dimostrano che la complessità dell'insieme delle formule soddisfacibili di $FP(C, Ł)$ e $FP(C, RPL)$ è NP-completo. Le tautologie sono coNP-complete.

2003 F. e Montagna caratterizzano la coerenza definettiana modulo la consistenza di teorie su $FP(C, RPL)$ e introducono la logica $FP(C, SŁ\Pi)$ per la probabilità condizionata (complessità PSPACE).

2004 Godo e Marchioni introducono una seconda logica per trattare la probabilità condizionale ($FCP(C, Ł\Pi)$), (complessità PSPACE)

2007 F. introduce una terza logica per la probabilità condizionata $FP_k(C, RŁ_\Delta)$ (complessità NP-completo). Si dimostra che testare la coerenza di assegnamenti di probabilità codizionata è NP-completo.

2007 F. e Godo introducono le logiche $FP(Ł_n, Ł)$, $FP(Ł, Ł)$ e $FCP(Ł, RPL)$ per la probabilitè e la probabilità condizionata su eventi a più valori. Dimostriamo completezza per $FP(Ł_n, Ł)$ e completezza alla Pavelka per $FCP(Ł, RPL)$. La completezza standard di $FP(Ł, Ł)$ è aperto!

2008 Hájek dimostra che la soddisfacibilità di $FP(Ł_n, Ł)$ è NP-completo, mentre quella di $FP(Ł, Ł)$ è PSPACE.

2008 F. dimostra una completezza iperreale per $FP(Ł, Ł)$.

2009 F. e Montagna introducono la logica $SFP(Ł, Ł)$. Estensione algebrizzabile di $FP(Ł, Ł)$ e dimostrano completezza rispetto alla classe delle SMV-algebre.

2009 F. e Bova dimostrano che la soddifacibilità di $SFP(Ł, Ł)$ (e quindi anche quella di $FP(Ł, Ł)$) è NP-completo.