T-normes i Lògica Borrosa

Carles Noguera i Clofent
IIIA-CSIC
cnoguera@iiia.csic.es

18 d'abril de 2005

Resum

En aquest treball fem una introducció general a la teoria de les lògiques borroses proposicionals, tot mostrant-ne les presentacions en càlculs axiomàtics d'estil Hilbert, les algebritzacions i les semàntiques estàndard basades en t-normes. Repassem els teoremes de completesa estàndard bo i fent-hi algunes aportacions originals. Exposem part dels últims avenços de la disciplina quant a l'obtenció de t-normes contínues per l'esquerra pels mètodes de completació de cadenes comptables, d'aniquilació de t-normes contínues i de sumes ordinals de t-normes i t-subnormes. També exposem resultats recents sobre el conjunt de punts de continuïtat de les t-normes contínues per l'esquerra. Finalment, hi adjuntem dos treballs originals: per una banda, sobre algunes simplificacions del llenguatge d'aquestes lògiques; per l'altra, sobre les seves expansions amb constants per a valors de veritat parcial.

Paraules clau: BL-àlgebres, lògica algebraica, lògica borrosa, lògica multivalorada, lògica subestructural, MTL-àlgebres, MV-àlgebres, reticles residuats, teoremes de completesa estàndard, t-normes contínues, t-normes contínues per l'esquerra, t-subnormes.

1 Introducció

Ja des dels seus inicis amb Aristòtil (384 a.C - 322 a.C.), la Lògica ha estat la disciplina dedicada a estudiar el raonament correcte i tradicionalment ho ha fet acceptant el Principi de Bivalència. Segons aquest principi, tota proposició és o bé vertadera o bé falsa, malgrat que en alguns casos pugui ser difícil o àdhuc impossible determinar quin dels dos valors cal assignar a una proposició determinada (pensem, per exemple, en el cas d'un enunciat sobre fets futurs). Així, s'han pogut caracteritzar les formes de raonament lògicament correcte com aquelles que en cap cas permeten obtenir conclusions falses a partir de premisses vertaderes. Aquesta lògica tradicional, que anomenarem *Lògica Clàssica*, es va revelar com una eina excel·lent per a la labor matemàtica, sobretot a partir del naixement de la Lògica Matemàtica al segle XIX de la mà d'Augustus de Morgan (1806-1878), George Boole (1815-1864) i Gottlob Frege (1848-1925), car la Matemàtica certament maneja conceptes precisos que donen lloc a enunciats que necessàriament han de ser o bé vertaders o bé falsos.

No obstant això, ja el mateix Aristòtil observava que molts dels conceptes que usem per enfrontar-nos a la realitat disten molt de poder ésser considerats precisos, o sia, són qualitats que admeten graus, tal com diu a *Categories* 8, 10b 27-32:

> Los cuales admiten también el más y el menos: en efecto, una cosa se llama más o menos blanca que otra, y una más justa que otra. Y lo mismo puede tomar incremento: en efecto, siendo blanco, puede hacerse aún más blanco; pero no todas las cosas, sino la mayoría: es, en efecto, muy dudoso si una justicia se puede decir que lo sea más que otra, y algo semejante ocurriría con las demás disposiciones.[1]

I més avall (a *Categories* 8, 11a 2-7) afegeix:

> Lo que se dice de acuerdo con estas cualidades admite, indiscutiblemente, el más y el menos: en efecto, uno se dice más letrado que otro, y más justo y más sano, y de igual manera en los otros casos. En cambio, lo triangular y lo cuadrangular no parecen admitir el más, como tampoco ninguna de las otras figuras.

Aquest tipus de predicats que admeten el més i el menys donen lloc a proposicions amb sentit que sovint no semblen ni clarament vertaderes ni clarament falses, com ara *Portes una samarreta blava* o *Aquell home és calb*, car és habitual per exemple que no ens posem d'acord sobre si una determinada peça de roba és de color blau, o potser és més aviat lila o de color blau marí.

Així topem amb el fenomen de la vaguetat, és a dir, amb predicats vagues per als quals no està ben determinat a quins objectes s'apliquen i a quins no.[2]

[1] Citem la traducció castellana disponible a [4].

[2] Convé no confondre la vaguetat amb l'ambigüitat, fenomen radicalment diferent.

Aquest fenomen esdevé un repte per a la Lògica quan examina raonaments com ara l'anomenada *paradoxa de l'home calb*:

Premisses:

(1) Un home que té vint mil cabells no és calb.

(2) Si un home que no és calb perd un cabell, continua no essent calb.

Conclusió:

(3) Un home sense cap cabell no és calb.

Aquest raonament aparentment correcte és una paradoxa lògica perquè deriva una conseqüència clarament falsa a partir de premisses certes (no tenim cap dubte que (1) és cert i, d'altra banda, (2) també sembla cert) usant vint mil aplicacions successives de la regla de Modus Ponens. Sembla, per tant, que la Lògica Clàssica topa amb dificultats notables a l'hora de tractar el raonament amb predicats vagues com ara *calb*. La Lògica Borrosa apareix com un intent matemàtic de modelitzar aquest tipus de raonament rebutjant el Principi de Bivalència i proposant una lògica infinitovalorada.

Tanmateix, la Lògica Borrosa apareix en un camp, el de les lògiques multivalorades, en què els seus precedents responien a motivacions diferents. La primera lògica multivalorada sorgeix quan l'any 1918 Jan Łukasiewicz (1878-1956) introdueix una lògica trivalorada per tractar el problema dels futurs contingents. Segons ell, el Principi de Bivalència implica un tipus de determinisme, ja que obliga totes les proposicions a ser certes o falses, fins i tot aquelles que enuncien fets del futur, que podríem pensar que *encara* no són ni certes ni falses. Per a aquestes proposicions afegeix un nou valor de veritat intermedi que anomena *possible*. Si $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ és aquest conjunt de tres valors de veritat, Łukasiewicz defineix les connectives lògiques d'implicació i de negació mitjançant les següents taules:

$\to$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\neg$
0	1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1	0

Per tant, usa un principi d'extensionalitat generalitzada segons el qual el valor de veritat d'una proposició complexa és calculable (usant les taules) a

L'ambigüitat apareix quan es tracta amb termes polisèmics que, per tant, donen lloc a proposicions equívoques, que poden tenir múltiples significats.

partir dels valors de veritat de les seves parts. El significat de les taules pot ser interpretat de la següent manera:

Suposem que $\{V, F\}$ són els valors de veritat clàssics, *vertader* i *fals*. Aleshores els tres valors de Łukasiewicz es poden interpretar com a conjunts de valors de veritat clàssics així: $0 = \{F\}$, $1 = \{V\}$ i $\frac{1}{2} = \{V, F\}$, ja que el valor $\frac{1}{2}$ s'assigna a aquelles proposicions que enuncien fets del futur i que, per tant, encara no sabem si seran certes o falses. Aleshores pràcticament totes les entrades de les taules s'obtenen operant cadascun dels elements d'aquests conjunts entre si segons les lleis de la implicació i de la negació clàssiques. Així, per exemple, $\{V, F\} \to \{V\} = \{V\}$, ja que segons la implicació clàssica $V \to V = V$ i $F \to V = V$. L'única entrada de les taules que no és compatible amb aquesta interpretació és $\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$, que hauria de ser $\frac{1}{2}$ i en canvi és 1. Aquesta alteració respon sens dubte a la voluntat de Łukasiewicz de preservar la validesa de la Llei d'Identitat, $\varphi \to \varphi$.

L'any 1922 Łukasiewicz generalitza (transcendint ja la motivació inicial dels futurs contingents) la lògica trivalorada a una lògica n-valorada per a cada $n \geq 4$ finit. Així, si ara el conjunt de valors de veritat és $\{0, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$, les operacions lògiques queden definides per $x \to y := \min\{1, 1 - x + y\}$ i $\neg x := 1 - x$. Finalment, l'any 1930, conjuntament amb Alfred Tarski (1901-1983) a [71], ho generalitza a una lògica infinitovalorada definint aquestes mateixes operacions sobre l'interval unitat real $[0, 1]$. En tots els casos, les connectives d'implicació i de negació permeten definir-ne algunes altres: $x * y := \neg(x \to \neg y)$, $x \vee y := (x \to y) \to y$ i $x \wedge y := \neg(\neg x \vee \neg y)$. D'aquesta manera, s'obtenen en particular dues connectives diferents, $*$ i $\wedge$, cadascuna de les quals té algunes característiques de la conjunció clàssica; per exemple:

1. Per qualssevol a, b, c $(a * b \leq c \Leftrightarrow a \leq b \to c)$ (llei de residuació)

2. Per qualssevol a, b $(a \to b = 1 \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \leq b)$ $(\wedge = \min)$

Per tant, en aquestes lògiques de Łukasiewicz es pot dir que hi ha dues conjuncions diferents.

Altres exemples pioners de lògiques finitament multivalorades són introduïts per Emil Post (any 1921, [78]), Kleene (any 1938, [65])[3] i Bochvar (any 1939) amb motivacions diverses. Però pel que fa al tema que aquí ens ocupa,

[3]Kleene, a diferència de Łukasiewicz, sí que dóna una lògica basada en taules que admeten la interpretació que hem donat més amunt. En efecte, per Kleene $\frac{1}{2} \to \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

la vaguetat i la Lògica Borrosa, seran les lògiques infinitovalorades com la de Łukasiewicz les que tindran un paper cabdal, sobretot a partir de l'aparició dels conjunts borrosos de la mà de Zadeh.

En efecte, l'any 1965 Lofti Zadeh funda la Teoria de Conjunts Borrosos a [90]. La seva idea consisteix a tractar els predicats vagues com a conjunts borrosos d'objectes, és a dir, com a conjunts en els quals un objecte determinat pot pertànyer en major o menor mesura. Formalment, un conjunt borrós és un parell $\langle X, \mu \rangle$ on X és un conjunt (en sentit clàssic) i $\mu : X \to [0, 1]$ és una funció (anomenada *funció de pertinença*) que assigna a cada objecte $x \in X$ un nombre real $\mu(x)$ entre 0 i 1, el qual s'interpreta com el grau de pertinença de l'objecte al conjunt borrós. Així, per exemple, donat un predicat vague com ara *alt*, podem definir un conjunt borrós de la següent manera: $X := [0.3, 2.4]$ (conjunt de possibles alçades en metres) i la funció de pertinença

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1.2, \\ \frac{5}{3}x - 2 & \text{si } 1.2 \leq x \leq 1.8, \\ 1 & \text{si } x > 1.8. \end{cases}$$

Aquest conjunt borrós diu que les persones de més de 1.8 metres d'alçada són altes, les de menys de 1.2 metres d'alçada no són altes en absolut i a les persones d'una alçada intermitja els assigna la qualitat *alt* en un grau intermedi segons una funció lineal.

L'any 1969 Goguen proposa a [45] utilitzar combinadament la lògica infinitovalorada de Łukasiewicz i els conjunts borrosos de Zadeh per resoldre la paradoxa de l'home calb. Concretament, diu que el predicat *calb* és vague i que, per tant, li correspon un conjunt borrós. No hi ha cap inconvenient a avaluar (1) amb el màxim valor de veritat: un home amb vint mil cabells és un exemple clar d'home no calb, és a dir, d'home amb grau 0 de pertinença al conjunt borrós dels calbs. Ara bé, (2) no és certa en el mateix grau. Diguem que el seu valor de veritat és $\frac{19999}{20000}$. Sigui v_i el valor de veritat de la proposició 'Un home amb i cabells no és calb'. Així tenim $v_{20000} = 1$ i $v_i \to v_{i-1} = \frac{19999}{20000}$. Suposem que aquesta implicació és la de Łukasiewicz. Calculant amb aquests valors s'obté fàcilment que $v_0 = 0$ i per tant la paradoxa es dissol.

En general, si hom vol modelitzar els predicats vagues mitjançant conjunts borrosos, cal també tenir alguna manera de combinar-los, és a dir, cal un mètode que permeti avaluar les proposicions que involucren diversos predicats vagues. La idea és interpretar la conjunció de dos predicats vagues com la intersecció dels conjunts borrosos corresponents punt a punt, és a dir, donar una operació tal que donat un objecte qualsevol i el seu grau de pertinença a cadascun dels conjunts borrosos, doni el grau de pertinença a la intersecció. Així mateix, la disjunció de predicats correspondrà a la reunió de conjunts borrosos i la negació, al complementari. En els treballs fundacionals Zadeh proposava utilitzar la funció min per a la intersecció, la funció max per a la reunió i la funció $1 - x$ per al complementari (és a dir, la negació de Łukasiewicz). Més endavant Alzina, Trillas i Valverde (vegeu [3]) van proposar utilitzar certes funcions sorgides de la teoria dels espais mètrics probabilístics (vegeu [83, 84]) anomenades *t-normes* per a la intersecció, i les seves duals, anomenades *t-conormes*, per a la reunió. De fet, la conjunció $*$ de la lògica infinitovalorada de Łukasiewicz és un dels exemples paradigmàtics de t-norma.

Des de llavors, la part de la Lògica Borrosa que s'ha anomenat *fuzzy logic in narrow sense* ha anat creixent tot desenvolupant múltiples sistemes de lògica infinitovalorada per tractar les inferències amb predicats vagues. Especialment, s'ha treballat en aquells en què hi ha una conjunció que s'interpreta amb una t-norma i en moltes ocasions, a més, s'hi ha usat una implicació que compleixi la llei de residuació respecte d'aquesta conjunció, o sia, una *R-implicació*. Aquests estudis constitueixen el que ha estat anomenat el *nucli* de la Lògica Borrosa en sentit ampli (*fuzzy logic in broad sense*), que tracta en general el problema de la vaguetat en els llenguatges naturals[4]. Aquesta disciplina ha trobat un gran nombre d'aplicacions a la Intel·ligència Artificial i a la tecnologia en general.

De tots els sistemes de lògica borrosa que s'han proposat en què s'usa una t-norma i una R-implicació, han tingut una especial rellevància aquells en què la t-norma en qüestió és contínua. Els sistemes d'aquest tipus més estudiats són la lògica de Łukasiewicz, la lògica del Producte i la lògica de Gödel, que es basen respectivament en la t-norma de Łukasiewicz, la t-norma donada pel producte de nombres reals i la t-norma del mínim. Hájek ha introduït a [49] un nou sistema, la lògica BL, que té com a extensions axiomàtiques aquestes tres lògiques borroses basades en t-normes contínues. Posteriorment, s'ha demostrat (vegeu [14]) que de fet BL és completa respecte a la semàntica donada per totes les t-normes contínues. Ulteriorment Esteva i Godo a [26] han proposat una lògica encara més dèbil, el sistema MTL, amb el propòsit de definir la lògica borrosa bàsica, o sia, la lògica més feble basada en t-normes i

[4]Cal dir, emperò, que la Lògica Borrosa no és l'únic model que s'ha proposat per tal de tractar la vaguetat; per exemple, a [89] hi ha una presentació de les diverses aproximacions al problema.

llurs corresponents R-implicacions. Resulta que donada una t-norma existeix la seva R-implicació si, i només si, és contínua per l'esquerra. A [62] Jenei i Montagna han reeixit a provar que efectivament MTL és completa respecte a la semàntica donada per totes les t-normes contínues per l'esquerra. La semàntica de BL es pot estudiar amb certa facilitat ja que es disposa d'un teorema de representació de t-normes contínues en sumes ordinals de les t-normes bàsiques, és a dir, de les t-normes de Łukasiewicz, del producte de nombres reals i del mínim. Ara bé, per a MTL no es té cap resultat d'aquestes característiques, o sia, no totes les t-normes contínues per l'esquerra són descomposables en suma ordinal de components bàsiques. Això fa que l'estudi de les lògiques borroses basades en t-normes contínues per l'esquerra sigui molt més complex i difícil.

En aquest treball presentem semànticament i sintàcticament la família de les lògiques borroses conegudes, fent un èmfasi especial en aquelles que es basen en t-normes. Concretament, a la secció 2 s'introdueixen aquestes lògiques com a càlculs deductius d'estil Hilbert i se'ls dóna una semàntica algebraica equivalent (les varietats de MTL-àlgebres). Examinem, també, aquella part de la semàntica algebraica que només usa l'interval $[0,1]$ com a conjunt de valors de veritat i que anomenem *semàntica estàndard*. A la secció 3 veiem com les funcions adequades per interpretar la conjunció de les lògiques borroses són les t-normes contínues per l'esquerra i que, a més, determinen essencialment les semàntiques estàndard. Per tant, aquestes funcions es converteixen en el fil conductor del treball. A la secció 4 es presenten els teoremes de representació de t-normes contínues en sumes ordinals i es generalitza la construcció a MTL-cadenes en general. A la secció 5 es repassen els teoremes de completesa d'algunes de les principals lògiques borroses respecte de les semàntiques de t-normes i s'estén a més lògiques a la secció 6 gràcies al mètode de completació de cadenes comptables. A la secció 7 es tracten les propietats dels conjunts de punts de continuïtat de les t-normes contínues per l'esquerra i a la secció 8 es dóna encara un altre mètode per obtenir t-normes contínues per l'esquerra i no contínues, el mètode de l'aniquilació. Finalment, la resta del treball recull dos articles originals en què s'estudien respectivament algunes fórmules per definir connectives en les lògiques borroses i les expansions d'algunes d'aquestes lògiques amb constants per a valors de veritat parcial.

2 Lògiques proposicionals borroses i la seva algebrització

La lògica proposicional borrosa més dèbil que considerarem serà la lògica MTL, i totes les lògiques borroses restants seran extensions finitàries (és a dir, obtingudes afegint regles finitàries o axiomes) de MTL. Les sigles del seu nom signifiquen *Monoidal T-norm based Logic* per raons que quedaran clares més endavant.

MTL apareix per primer cop definida per Esteva i Godo a [26]. És presentada a través d'un sistema formal d'estil Hilbert en el llenguatge $\mathcal{L} = \{*, \rightarrow, \wedge, 0\}$ de tipus $(2, 2, 2, 0)$. Té *Modus Ponens* com a única regla d'inferència i els següents esquemes d'axioma (sempre farem la convenció que $\rightarrow$ és l'última connectiva en l'ordre de prioritat):

(A1)	$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
(A2)	$\varphi * \psi \rightarrow \varphi$
(A3)	$\varphi * \psi \rightarrow \psi * \varphi$
(A4)	$\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$
(A5)	$\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi \wedge \varphi$
(A6)	$\varphi * (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \wedge \psi$
(A7a)	$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi * \psi \rightarrow \chi)$
(A7b)	$(\varphi * \psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$
(A8)	$((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \chi) \rightarrow \chi)$
(A9)	$0 \rightarrow \varphi$

També s'introdueixen les següents connectives definides:

$\varphi \vee \psi := ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \wedge ((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$;

$\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) * (\psi \rightarrow \varphi)$;

$\neg\varphi := \varphi \rightarrow 0$;

$\varphi \oplus \psi := \neg(\neg\varphi * \neg\psi)$;

$1 := \neg 0$.

Considerarem les següents extensions axiomàtiques de MTL:

- La lògica IMTL (Involutive Monoidal T-norm based Logic, [26]), és l'extensió axiomàtica de MTL amb l'axioma d'involució:

$$((\varphi \to 0) \to 0) \to \varphi \qquad \text{(Inv)}$$

- SMTL (Strict Monoidal T-norm based Logic, [25]), s'obté afegint a MTL l'axioma de pseudocomplementació:

$$(\varphi \wedge \neg\varphi) \to 0 \qquad \text{(Pseudo)}$$

- ΠMTL (Product Monoidal T-norm based Logic, [51]), és l'extensió de SMTL amb l'axioma de cancel·lació:

$$\neg\neg\chi \to (((\varphi * \chi) \to (\psi * \chi)) \to (\varphi \to \psi)) \qquad (\Pi 1)$$

- Per a la lògica WNM (Weak Nilpotent Minimum, [26]) afegim:

$$(\varphi * \psi \to 0) \vee (\varphi \wedge \psi \to \varphi * \psi) \qquad \text{(WNM)}$$

- NM (Nilpotent Minimum, [26]) es defineix afegint (Inv) i (WNM) als axiomes de MTL.

- BL (Basic Logic, [49]) és la lògica obtinguda amb l'axioma de divisibilitat:

$$\varphi * (\varphi \to \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \psi \qquad \text{(Div)}$$

També tractarem algunes extensions de BL: Strict Basic Logic SBL ([29]), la lògica Ł de Łukasiewicz ([71]), la lògica del Producte Π ([48]) i la de Gödel ([44, 22]). S'obtenen afegint els següents axiomes als de BL:

$$(\varphi \wedge \neg\varphi) \to 0$$

per SBL,

$$((\varphi \to 0) \to 0) \to \varphi$$

per Ł,

$$(\varphi \wedge \neg\varphi) \to 0,$$

$$\neg\neg\chi \to (((\varphi * \chi) \to (\psi * \chi)) \to (\varphi \to \psi))$$

per la lògica del Producte i

$$\varphi \to \varphi * \varphi \qquad \text{(Con)}$$

per la lògica de Gödel. Aquesta última és també l'extensió de la lògica proposicional intuïcionista coneguda com a lògica de Dummett obtinguda afegint l'axioma de prelinealitat:

$$(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi) \qquad \text{(Lin)}$$

A la part ombrejada de la figura 1 podem veure el reticle d'aquestes lògiques, vistes com a extensions de la Lògica Monoidal, que introduirem més endavant.

Figura 1: *Principals extensions de la Lògica Monoidal.*

Denotarem amb $Fm_{\mathcal{L}}$ el conjunt de les $\mathcal{L}$-fórmules obtingudes a partir d'un cert conjunt numerable de variables. $Eq_{\mathcal{L}}$ serà el conjunt de les $\mathcal{L}$-equacions[5], és a dir, les expressions de la forma $\varphi \approx \psi$ on $\varphi, \psi \in Fm_{\mathcal{L}}$. Si L és la lògica MTL o qualsevol de les seves extensions finitàries i $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$, $\Gamma \vdash_L \varphi$ significarà que φ és derivable a partir de Γ en el càlcul d'estil Hilbert corresponent a L. Escriurem $\vdash_L \varphi$ enlloc de $\emptyset \vdash_L \varphi$.

En el mateix article Esteva i Godo donen una semàntica algebraica a MTL, basada en el que anomenen *MTL-àlgebres.* A continuació definim aquestes estructures:

Definició 1. *Un reticle residuat fitat integral i commutatiu és una àlgebra* $\mathcal{A} = \langle A, *, \rightarrow, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ *de tipus* $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$ *tal que:*

1. $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ *és un reticle fitat.*
2. $\langle A, *, 1\rangle$ *és un monoide commutatiu.*
3. *Les operacions* $*$ *i* $\rightarrow$ *formen un parell adjunt:*

$$\forall a, b, c \in A,\ a * b \leq c \text{ sii } b \leq a \rightarrow c.$$

En direm reticle residuat *per a més brevetat. Habitualment s'hi afegeix una operació de negació definida com:* $\neg a := a \rightarrow 0$ *per cada* $a \in A$.

Krull va ser el primer a estudiar aquestes estructures a [69]. Foren anomenades *reticles residuats* per primer cop per Dilworth i Ward a [19] i posteriorment han estat estudiades amb diversos noms: *l-monoides commutatius residuats* (Birkhoff [5] i Höhle [53]), *BCK-àlgebres amb la condició (S)* (Iseki [56]), *BCK-reticles* (Idziak [54, 55]), *BCK-àlgebres plenes* (Ono i Komori [76]) i FL_{ew}*-àlgebres* (Ono [75]).

És sabut que la classe dels reticles residuats és una varietat, $\mathbb{RL}$. Per exemple, aquesta n'és una presentació equacional:

[5] Al llarg d'aquest treball s'utilitzen vàries nocions d'Àlgebra Universal sense que en donem una definició. Totes elles es poden trobar a [6].

1. $(x \wedge y) \wedge z \approx x \wedge (y \wedge z)$
2. $(x \vee y) \vee z \approx x \vee (y \vee z)$
3. $x \wedge y \approx y \wedge x$
4. $x \vee y \approx y \vee x$
5. $x \wedge x \approx x$
6. $x \vee x \approx x$
7. $x \wedge (x \vee y) \approx x$
8. $x \vee (x \wedge y) \approx x$
9. $x \wedge 0 \approx 0$
10. $x \vee 1 \approx 1$
11. $(x * y) * z \approx x * (y * z)$
12. $x * y \approx y * x$
13. $x * 1 \approx x$
14. $x * (y \vee z) \approx (x * y) \vee (x * z)$
15. $x * y \to z \approx x \to (y \to z)$
16. $(x * (x \to y)) \wedge y \approx x * (x \to y)$
17. $x \wedge y \to y \approx 1$

Proposició 2. *Sigui $\mathcal{A} \in \mathbb{RL}$. Aleshores:*

(i) *Per qualssevol $a, b \in A$, $a \to b = 1$ sii $a \leq b$.*

(ii) *Per qualssevol $a, b \in A$, $a \to b = \max\{c \in A : a * c \leq b\}$.*

(iii) *$*$ és una operació contínua per l'esquerra respecte a la topologia de l'ordre, això és, per tot $X \subseteq A$ tal que existeixi $\sup X$ en A, $b * \sup X = \sup\{b * a : a \in X\}$.*

Definició 3. *Sigui $\mathcal{A} \in \mathbb{RL}$. Aleshores $\mathcal{A}$ és una MTL-àlgebra sii $\mathcal{A} \models (x \to y) \vee (y \to x) \approx 1$, és a dir, si a més satisfà l'equació de prelinealitat. Si l'ordre reticular de $\mathcal{A}$ és total, direm que és una MTL-cadena. $\mathbb{MTL}$ denotarà la varietat de les MTL-àlgebres.*

Definició 4. *Donada una MTL-àlgebra $\mathcal{A}$ es defineixen els conjunts dels elements positius i dels elements negatius respectivament així:*
$A_+ := \{a \in A : a > \neg a\}$
$A_- := \{a \in A : a \leq \neg a\}$

La varietat $\mathbb{MTL}$ s'usa per a definir una relació de conseqüència semàntica. Primer definim el concepte de valoració i la relació de conseqüència donada per una sola àlgebra:

Definició 5. *Donades dues $\mathcal{L}$-àlgebres $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, definim Hom$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ com el conjunt dels homomorfismes de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Direm que els elements de Hom$(Fm_{\mathcal{L}}, \mathcal{A})$ són valoracions sobre l'àlgebra $\mathcal{A}$.*

Definició 6. *Sigui $\mathcal{A} \in \mathbb{MTL}$. Donades $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ definim:*
$\Gamma \vDash_{\mathcal{A}} \varphi$ *sii per qualsevol valoració $v \in$ Hom$(Fm_{\mathcal{L}}, \mathcal{A})$ (si $v[\Gamma] \subseteq \{1\}$, llavors $v(\varphi) = 1$).*

Ara ja podem definir la relació de conseqüència semàntica associada a $\mathbb{MTL}$:

Definició 7. *Donades $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$, definim: $\Gamma \vDash_{\mathbb{MTL}} \varphi$ sii per tota $\mathcal{A} \in \mathbb{MTL}$ $\Gamma \vDash_{\mathcal{A}} \varphi$.*

Això ens porta al primer teorema de completesa per a MTL.

Teorema 8 ([26]). *Si $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$, llavors $\Gamma \vDash_{\mathbb{MTL}} \varphi$ sii $\Gamma \vdash_{MTL} \varphi$.*

Tanmateix aquest resultat es pot millorar usant la noció de conseqüència equacional:

Definició 9. *Siguin $\Sigma \cup \{\varphi \approx \psi\} \subseteq Eq_{\mathcal{L}}$. Es defineix la conseqüència equacional així:*
$\Sigma \vDash_{\mathbb{MTL}} \varphi \approx \psi$ *sii per tota $\mathcal{A} \in \mathbb{MTL}$ i tota valoració v en $\mathcal{A}$, tenim:*

$$Si\ \forall\, \alpha \approx \beta \in \Sigma,\ v(\alpha) = v(\beta),\ llavors\ v(\varphi) = v(\psi).$$

Aleshores és immediat provar el següent teorema:

Teorema 10. *La relatió de derivabilitat del sistema MTL i la conseqüència equacional associada a la varietat $\mathbb{MTL}$ són intertraduïbles. Concretament, donades $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ i $\Sigma \cup \{\varphi \approx \psi\} \subseteq Eq_{\mathcal{L}}$, es satisfan les següents condicions:*

1. $\Gamma \vdash_{MTL} \varphi$ *sii* $\{\psi \approx 1 : \psi \in \Gamma\} \vDash_{\mathbb{MTL}} \varphi \approx 1$.

2. $\Sigma \vDash_{\mathbb{MTL}} \varphi \approx \psi$ *sii* $\{\alpha \leftrightarrow \beta : \alpha \approx \beta \in \Sigma\} \vdash_{MTL} \varphi \leftrightarrow \psi$.

A més, cadascuna d'aquestes traduccions és inversa de l'altra en el sentit següent:

3. $\varphi \approx \psi \models_{\mathbb{MTL}} \varphi \leftrightarrow \psi \approx 1$ *i* $\varphi \leftrightarrow \psi \approx 1 \models_{\mathbb{MTL}} \varphi \approx \psi$.

4. $\varphi \vdash_{MTL} \varphi \leftrightarrow 1$ *i* $\varphi \leftrightarrow 1 \vdash_{MTL} \varphi$.

Aquest teorema diu exactament que la lògica MTL és algebritzable en el sentit que Blok i Pigozzi defineixen a [6] i que ha estat posteriorment desenvolupat en el marc més general de la Lògica Algebraica Abstracta (vegeu [35]). De fet, en el llenguatge d'aquesta disciplina, el teorema anterior prova que MTL és una lògica regularment, fortament i finitament algebritzable (usant les traduccions $\tau(\varphi) = \varphi \approx 1$ i $\rho(\varphi \approx \psi) = \varphi \leftrightarrow \psi$) i que $\mathbb{MTL}$ és la seva varietat semàntica algebraica equivalent. De la teoria general de lògiques algebritzables se segueix que totes les extensions finitàries de MTL són també algebritzables i que hi ha un isomorfisme dual d'ordre entre el conjunt d'aquestes extensions i el reticle de subquasivarietats de $\mathbb{MTL}$. Concretament, si L és l'extensió finitària de MTL obtinguda afegint el conjunt d'axiomes Σ i el conjunt de regles R, aleshores la seva semàntica algebraica equivalent és la subquasivarietat de $\mathbb{MTL}$ que s'obté afegint a la seva axiomatització equacional les equacions $\tau(\Sigma) := \{\tau(\varphi) : \varphi \in \Sigma\}$ i les quasiequacions $\tau(R) := \{\bigwedge_{i<n} \tau(\varphi_i) \Rightarrow \tau(\varphi_n) : \langle \varphi_0, \ldots, \varphi_n \rangle \in R\}$. Denotarem aquesta quasivarietat amb $\mathbb{L}$ o també amb $\mathbb{MTL}[\tau(\Sigma), \tau(R)]$ i ens referirem a les seves àlgebres com a L-àlgebres. Recíprocament, donada una presentació quasiequacional d'una subquasivarietat qualsevol de $\mathbb{MTL}$, es troba la lògica associada fent la traducció a través de ρ de les equacions en axiomes i de les quasiequacions en regles. Per tant, és clar que el problema de trobar les extensions finitàries de MTL és equivalent al de classificar les subquasivarietats de $\mathbb{MTL}$.

Observem que quan es tracta d'extensions axiomàtiques, les semàntiques algebraiques equivalents són subvarietats de $\mathbb{MTL}$. Algunes d'elles han estat ja molt estudiades. Per exemple, a la lògica proposicional clàssica (extensió de MTL afegint per exemple l'axioma de pseudocomplementació i el del terç exclòs) li correspon la varietat de les àlgebres de Boole, $\mathbb{BA}$. Les BL-àlgebres ja van ser introduïdes a [49] i han estat objecte de molts estudis en què s'ha mostrat, entre d'altres fets, que el seu reticle de subvarietats no és comptable ([2, 14, 20, 21, 30, 86]). Les àlgebres producte només tenen una subvarietat pròpia, a saber la de les àlgebres de Boole, tal com es demostra a [16]. L'estructura de les subvarietats de G-àlgebres i de NM-àlgebres també és totalment coneguda (vegeu [46] i [41] respectivament). Les MV-àlgebres formen la varietat associada a Ł; són, per tant, les BL-àlgebres involutives.

Van ser definides per Chang a [9, 10] i són polinomialment equivalents a les àlgebres de Wajsberg (vegeu [80]). Actualment se'n té un coneixement molt complet (veure per exemple la monografia [15], la classificació de les seves subvarietats a [68] o un estudi de les seves subquasivarietats a [39, 42, 40]). En canvi, les IMTL-àlgebres (definides a [26]), que són les MTL-àlgebres involutives, pràcticament no han estat estudiades en general. El nostre treball [74] està dedicat a donar alguns primers resultats sobre la varietat $\mathbb{IMTL}$.

A [26] es demostra un altre important teorema referent a l'estructura d'aquestes àlgebres.

Teorema 11 ([26]). *Tota MTL-àlgebra és representable com a producte subdirecte de MTL-cadenes.*

Això ens dóna com a corol·lari el segon teorema de completesa.

Corol·lari 12 ([26]). *Siguin* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$. $\Gamma \vdash_{MTL} \varphi$ *sii* $\Gamma \models_{\mathcal{A}} \varphi$ *per tota MTL-cadena* $\mathcal{A}$.

Aquesta completesa respecte a les cadenes també és certa per a qualsevol extensió finitària de MTL.

És interessant tenir en compte la relació que té MTL amb altres sistemes lògics més febles. Höhle va introduir a [53] una lògica, que va anomenar *Lògica Monoidal* (ML). La seva idea era definir una lògica que recollís l'estructura algebraica bàsica associada a totes les lògiques multivalorades, que segons ell era l'estructura de monoide commutatiu, reticulat i residuat (el que nosaltres hem anomenat *reticle residuat*), i d'aquí el nom de la lògica que va definir. De fet, va demostrar que la contrapartida algebraica de la Lògica Monoidal és la varietat dels reticles residuats. Per tant, es tracta d'un sistema més feble que MTL. Höhle en va donar un càlcul d'estil Hilbert amb 14 axiomes i Modus Ponens com a única regla d'inferència en el llenguatge $\mathcal{L}$ amb una connectiva addicional per a la disjunció, $\vee$. Aquesta axiomàtica fou simplificada per Gottwald a [46] de forma incorrecta, ja que hi mancava un axioma tal com van advertir García-Cerdaña i Bou. La versió simplificada correcta es troba a [47] i conté els següents axiomes:

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{Ax}_{ML}1) & (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)) \\
(\mathrm{Ax}_{ML}2) & \varphi * \psi \to \varphi \\
(\mathrm{Ax}_{ML}3) & \varphi * \psi \to \psi * \varphi \\
(\mathrm{Ax}_{ML}4) & (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi * \psi \to \chi) \\
(\mathrm{Ax}_{ML}5) & (\varphi * \psi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi)) \\
(\mathrm{Ax}_{ML}6) & \varphi \wedge \psi \to \varphi \\
(\mathrm{Ax}_{ML}7) & \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi \\
(\mathrm{Ax}_{ML}8) & (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi \wedge \chi)) \\
(\mathrm{Ax}_{ML}9) & 0 \to \varphi \\
(\mathrm{Ax}_{ML}10) & \varphi \to \varphi \vee \psi \\
(\mathrm{Ax}_{ML}11) & \psi \to \varphi \vee \psi \\
(\mathrm{Ax}_{ML}12) & (\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))
\end{array}
$$

MTL és l'extensió de ML que s'obté afegint l'axioma de prelinealitat. A [27] s'estudien la major part de les extensions axiomàtiques de ML (que podem veure a la figura 2) obtingudes combinant els diversos axiomes que han anat apareixen en aquest capítol i també els següents:

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \to (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \qquad \text{(Dist)}$$

$$\varphi \vee \psi \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi) \qquad (\vee\text{-def})$$

Figura 2: *Altres extensions de la Lògica Monoidal.*

Aquesta lògica ML de Höhle resulta ésser equivalent a una de les anomenades *lògiques subestructurals*, a saber la lògica H_{BCK} d'Ono i Komori ([76]), que posteriorment Ono ha anomenat FL_{ew} (vegeu [75]). En efecte, Adillon i Verdú demostren [1] que H_{BCK} és una lògica algebritzable que de fet té com a semàntica algebraica equivalent la varietat dels reticles residuats $\mathbb{RL}$.

Les lògiques subestructurals tenen en comú que en totes elles alguna de les següents fórmules no és demostrable:

(C) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$

(K) $\psi \to (\varphi \to \psi)$

(W) $(\varphi \to (\varphi \to \psi)) \to (\varphi \to \psi)$

En el cas de les lògiques borroses, resulta que (K) i (C) són demostrables però, en canvi, (W) no és demostrable en general. Això, justifica que incloguem aquestes lògiques a la família de les subestructurals. En aquesta família, el llenguatge de connectives és habitualment més ric que el de la lògica clàssica. Sovint és distingeix terminològicament entre dos grups de connectives, les additives i les multiplicatives. En el cas particular de les lògiques borroses aquesta distinció queda de la següent manera:

1. Connectives multiplicatives: $*, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \oplus, 0, 1$
2. Connectives additives: $\wedge, \vee, 0, 1$.

En algunes ocasions també ens referirem a la conjunció multiplicativa $*$ com a *fusió*.

3 T-normes contínues per l'esquerra i àlgebres estàndard

Per modelitzar la fusió de les lògiques borroses s'ha proposat l'ús de les normes triangulars. Aquestes funcions, també conegudes com a *t-normes*, havien sorgit en el context dels espais mètrics probabilístics (veure els treballs de Schweizer i Sklar [83, 84]) basant-se en les idees presentades per Menger a [72]. Un tractament monogràfic i extensiu sobre les t-normes es pot trobar a [66] i un estat de l'art actual es pot veure a [67].

Definició 13. *Una t-norma és una funció* $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ *tal que per qualssevol* $a, b, c \in [0,1]$ *satisfà:*

- $T(a,b) = T(b,a)$ *(simetria)*
- $T(a, T(b,c)) = T(T(a,b), c)$ *(associativitat)*
- *Si* $b \leq c$, *llavors* $T(a,b) \leq T(a,c)$ *(monotonia)*
- $T(a,1) = a$ *(element neutre)*

De la definició se segueixen immediatament algunes altres propietats:

Proposició 14. *Sigui* $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ *una t-norma. Per qualssevol* $a, b \in [0,1]$ *valen les següents:*

- $T(a,0) = 0$
- $T(a,b) \leq min\{x,y\}$

Considerarem també la següent generalització de la noció de t-norma introduïda a [58, 60]:

Definició 15. *Una t-subnorma és una funció* $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ *tal que per qualssevol* $a, b, c \in [0,1]$ *satisfà:*

- $T(a,b) = T(b,a)$ *(simetria)*
- $T(a, T(b,c)) = T(T(a,b), c)$ *(associativitat)*
- *Si* $b \leq c$, *llavors* $T(a,b) \leq T(a,c)$ *(monotonia)*
- $T(a,b) \leq min\{x,y\}$

Com que són funcions binàries, normalment les tractarem com a operacions entre parells d'elements i per tant utilitzarem la notació operacional: $a * b$ enlloc de $T(a, b)$.

Per tal de modelitzar també la implicació de les lògiques borroses, s'introdueix el concepte de residu d'una t-norma.

Definició 16. *Sigui $*$ una t-norma. Per cada parell $\langle a, b\rangle \in [0,1]^2$ definim el pseudocomplement de a respecte a b com: $a \to b := \sup\{c \in [0,1] : a * c \leq b\}$.*

Proposició 17. *Sigui $*$ una t-norma i considerem l'operació $\to$ associada. $*$ i $\to$ formen un parell adjunt sii $*$ és contínua per l'esquerra. En aquest cas es diu que $\to$ és el residu de $*$.*

Proposició 18. *Si $*$ és una t-norma contínua per l'esquerra i $\to$ és el seu residu, llavors per qualssevol $a, b \in [0,1]$ es satisfan:*

(i) $a \to b = \max\{c \in [0,1] : a * c \leq b\}$.

(ii) $a \to b = 1$ *sii* $a \leq b$.

(iii) $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$.

(iv) $\max\{a, b\} = \min\{(a \to b) \to b, (b \to a) \to a\}$.

Així, donada una t-norma $*$ contínua per l'esquerra, l'àlgebra $[0,1]_* = \langle [0,1], *, \to, \min, \max, 0, 1\rangle$ és una MTL-cadena. Fixem-nos que l'àlgebra queda totalment determinada per la t-norma contínua per l'esquerra. Ens referirem a aquestes cadenes sobre $[0,1]$ com a *àlgebres estàndard.* Aquestes àlgebres donen una semàntica correcta per a la lògica MTL. Més endavant veurem que, de fet, és una semàntica completa. Així quedarà justificat el seu nom, ja que MTL serà aquella extensió de la lògica monoidal que correspon a les t-normes contínues per l'esquerra.

Les operacions de negació d'aquestes àlgebres estàndard han estat ben estudiades a [87, 23], amb el nom de *funcions de negació feble.* A continuació en resumim algunes de les propietats principals.

Proposició 19 ([23]). *Una funció $n : [0,1] \to [0,1]$ és la negació d'una MTL-àlgebra estàndard sii satisfà les següents condicions:*

1. $n(1) = 0$.

2. *Si $a \leq b$, llavors $n(b) \leq n(a)$.*

3. $a \leq n(n(a))$, *per tot* $a \in [0,1]$.

Definició 20 ([23]). *Dues funcions de negació feble* n_1 *i* n_2 *són isomorfes sii hi ha un homeomorfisme creixent* $f : [0,1] \to [0,1]$ *tal que* $f(n_1(a)) = n_2(f(a))$ *per tot* $a \in [0,1]$.

En el cas involutiu, és a dir, quan $a = n(n(a))$ per tot $a \in [0,1]$, es diu que n és una *negació forta.* Són totes isomorfes a la negació forta estàndard: $n(a) = 1 - a$. Les negacions fortes sempre són bijeccions estrictament decreixents, per tant, contínues. En canvi, les funcions de negació dèbil en general només són contínues per l'esquerra.

Aquestes funcions a més tenen una certa propietat de simetria; dit de manera informal: si completem la seva gràfica dibuixant segments verticals en els salts que hi ha en els punts de discontinuïtat, obtenim una gràfica que és simètrica respecte a la diagonal $x = y$. Més formalment:

Definició 21. *Es diu que una funció decreixent* $n : [0,1] \to [0,1]$ *és simètrica respecte a la diagonal si, i només si, satisfà les següents propietats:*

1. *Si* $a \in n([0,1])$ *i* $n(a) = b$, *llavors* $a = n(b)$.
2. *Si* $a \notin n([0,1])$, *llavors:*
   (i) n *és constant en l'interval* $[a, n(n(a))]$ *amb valor* $n(a)$, *i*
   (ii) per tot $b > n(a)$ *es té* $n(b) < a$, *és a dir,* $n(a)$ *és un punt de discontinuïtat per la dreta amb* $n(n(a)^-) = n(n(a))$ *i* $n(n(a)^+) = \inf\{c : n$ *és constant en* $[c, n(n(a))]\} < a$.

Proposició 22 ([23]). *Una funció* $n : [0,1] \to [0,1]$ *és una negació dèbil si, i només si, és decreixent i simètrica respecte a la diagonal i* $n(1) = 0$.

Les àlgebres estàndard associades a la lògica BL, són aquelles en què la t-norma i el seu residu compleixen la condició de divisibilitat, és a dir, $\min\{a,b\} = a * (a \to b)$ per qualssevol $a, b \in [0,1]$. És ben coneguda la següent caracterització:

Proposició 23. *Sigui* $\mathcal{A} = \langle [0,1], *, \to, \min, \max, 0, 1 \rangle$ *una MTL-cadena estàndard.* $\mathcal{A}$ *és una BL-àlgebra si, i només si,* $*$ *és una t-norma contínua.*

En general, una funció de dues variables pot ésser contínua a cada variable sense ésser contínua. Tanmateix, gràcies a la monotonia, aquest no és el cas de les t-normes.

Proposició 24. *Una t-norma és contínua si, i només si, és contínua a cada variable.*

Per tant, a causa de la commutativitat, la continuïtat equival a la continuïtat a la primera variable.

Cal remarcar que l'equivalència esmentada entre continuïtat i divisibilitat per a t-normes, no és generalitzable a totes les MTL-cadenes. De fet, Boixader, Esteva i Godo han demostrat el següent:

Proposició 25 ([7]). *En tota BL-cadena l'operació de fusió és contínua respecte a la topologia de l'ordre.*

La implicació contrària no és certa, tal com mostren en un exemple de MTL-cadena en què la fusió és contínua però no es satisfà la divisibilitat. Ara bé, en alguns casos una mica més generals que el cas de $[0, 1]$ sí que es té l'equivalència entre continuïtat i divisibilitat:

Proposició 26 ([7]). *Sigui $\mathcal{A}$ una MTL-cadena tal que l'ordre sigui dens i complet. Llavors $*$ és contínua si, i només si, $\mathcal{A}$ satisfà l'equació de divisibilitat.*

Donem algunes definicions que seran útils per a distingir diverses t-normes:

Definició 27. *Una t-norma contínua s'anomena arquimediana sii no té cap element idempotent llevat de 0 i 1. Una t-norma arquimediana s'anomena estricta sii no té cap element nilpotent llevat de 0; altrament s'anomena nilpotent.*

Finalment, introduim les t-normes contínues que ens permeten definir les àlgebres estàndard associades a les lògiques de Gödel, del Producte i de Łukasiewicz. També donem una família notable de t-normes contínues per l'esquerra que no són contínues.

1. Només hi ha una G-cadena estàndard i és la definida per la t-norma del mínim, és a dir, per: $a *_G b = \min\{a, b\}$. El residu és:

$$a \rightarrow_G b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b, \\ b & \text{altrament.} \end{cases}$$

i la negació és:

$$\neg a = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

La denotarem per $[0,1]_G$. Fixem-nos que tot els seus elements són idempotents i que satisfà l'equació de pseudocomplementació ($x \wedge \neg x \approx 0$).

2. Totes les Π-àlgebres estàndard són isomorfes a la que té com a t-norma el producte de reals: $a *_\Pi b = ab$. El seu residu és la implicació de Goguen:

$$a \rightarrow_\Pi b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b, \\ b/a & \text{altrament.} \end{cases}$$

   i la negació és la de Gödel.

   La denotarem per $[0,1]_\Pi$. Observem que és arquimediana i estricta. A més també satisfà la pseudocomplementació i la llei de cancel·lació: Per quassevol $a, b, c \in [0,1]$ (si $c \neq 0$ i $a * c = b * c$, llavors $a = b$).

3. Les MV-àlgebres estàndard són totes isomorfes a la que té com a t-norma la de Łukasiewicz: $a *_L b = \max\{0, a + b - 1\}$. El seu residu és:

$$x \rightarrow_L y = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b, \\ 1 - a + b & \text{altrament.} \end{cases}$$

   i la seva negació és la negació forta estàndard: $\neg a = 1 - a$.

   La denotarem per $[0,1]_L$. Observem que és arquimediana i nilpotent (tots els elements llevat de 1 són nilpotents) i que la seva negació és involutiva. Satisfà una forma restringida de cancel·lació: Per quassevol $a, b, c \in [0,1]$ (si $c \neq 0$ i $a * c = b * c \neq 0$, llavors $a = b$).

4. Les WNM-cadenes estàndard són aquelles definides per una funció de negació dèbil qualsevol n i una t-norma del tipus:

$$a *_n b = \begin{cases} \min\{a, b\} & \text{si } a > n(b), \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

   El seu residu és:

$$a \rightarrow_n b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b, \\ \max\{n(a), b\} & \text{altrament.} \end{cases}$$

   Observem que aquesta família inclou $[0,1]_G$ i les totes NM-cadenes estàndard (aquelles que tenen una negació involutiva). Dues àlgebres d'aquest tipus són isomorfes si, i només si, són isomorfes les seves negacions. Per tant, en el cas involutiu veiem que totes les NM-cadenes estàndard són isomorfes a la que té com a funció de negació la negació forta estàndard ([34]); la denotarem per $[0,1]_{NM}$.

4 Sumes ordinals

En aquest capítol estudiarem l'estructura de les t-normes utilitzant la noció de suma ordinal. Aquesta construcció permet d'una banda descriure totalment les t-normes contínues i d'altra banda obtenir algunes t-normes contínues per l'esquerra que no siguin contínues. Finalment, generalitzarem l'operació de manera que poguem considerar la suma ordinal de qualsevol col·lecció de MTL-cadenes i veurem que així també es pot donar una descripció de les BL-cadenes en termes de sumes ordinals.

El concepte de suma ordinal neix en el camp dels semigrups ordenats (vegeu [17, 18, 36]). En el cas particular de les t-normes la definició és la següent:

Definició 28. *Sigui $\{[a_i, b_i] : i \in I\}$ una família comptable d'intervals tancats de $[0,1]$ amb interiors disjunts dos a dos. Per cada $i \in I$ sigui $*_i$ una t-norma definida a $[a_i, b_i]^2$. La suma ordinal d'aquesta família de t-normes és l'operació definida per:*

$$x * y = \begin{cases} x *_m y & \text{si } \exists m \text{ tal que } \langle x, y \rangle \in [a_m, b_m]^2, \\ \min\{x, y\} & \text{altrament.} \end{cases}$$

És immediat comprovar que la suma ordinal d'una famíla de t-normes contínues és una t-norma contínua i que la suma ordinal de t-normes contínues per l'esquerra també és contínua per l'esquerra. Aquesta construcció va permetre a Mostert i Shields ([73]) i a Ling ([70]) fer una representació exhaustiva de totes les t-normes contínues. A continuació enunciarem aquest resultat.

Proposició 29. *Sigui $*$ una t-norma contínua i $u \in [0,1]$ un element idempotent. Aleshores per qualssevol $a, b \in [0,1]$ tals que $a \leq u \leq b$, es té: $a * b = a$. Per tant, les restriccions de $*$ a $[0,u]^2$ i a $[u,1]^2$ són isomorfes a t-normes contínues i $*$ és la suma ordinal d'aquestes dues restriccions.*

Observació 1. *Sigui $*$ una t-norma contínua. El conjunt dels seus elements idempotents és un tancat de $[0,1]$, per tant, el seu complementari és la unió d'una família comptable d'intervals oberts disjunts dos a dos. Sigui $\mathcal{I}(*)$ la família de les clausures d'aquests intervals.*

Ajuntant aquests dos fets, podem descomposar tota t-norma contínua en una suma ordinal de t-normes contínues i arquimedianes i així s'obté el teorema de representació de t-normes contínues:

Teorema 30 ([73, 70]). *Sigui $*$ una t-norma contínua. Aleshores:*

(i) Per cada interval $I \in \mathcal{I}(*)$, la restricció de $*$ a I^2 és isomorfa a $[0,1]_\Pi$ o a $[0,1]_L$ (segons si és estricta o nilpotent).

(ii) Si $a, b \in [0,1]$ i no hi ha cap $I \in \mathcal{I}(*)$ tal que $a, b \in I$, llavors $a * b = \min\{a, b\}$.

Per tant, tota t-norma contínua és una suma ordinal d'unes t-normes contínues bàsiques: la t-norma del mínim, la del producte i la de Łukasiewicz. Malauradament no disposem d'un resultat d'aquestes característiques per a descriure totes les t-normes contínues per l'esquerra. El raonament anterior no es pot aplicar perquè la Proposició 29 requereix la continuïtat. En general, si considerem la restricció d'una t-norma contínua per l'esquerra a un interval amb extrems idempotents, no obtenim una t-norma sinó una t-subnorma. Per aquest motiu Jenei ha generalitzat a [59] la noció de suma ordinal per a obtenir t-normes contínues per l'esquerra, permetent que alguns sumands siguin t-subnormes contínues per l'esquerra.

Teorema 31 ([59]). *Sigui $\{[a_i, b_i] : i \in I\}$ una família comptable d'intervals tancats de $[0,1]$ amb interiors disjunts dos a dos. Per cada $i \in I$ sigui $*_i$ una t-subnorma contínua definida a $[a_i, b_i]^2$, de manera que si tenim dos intervals $[a_i, b_i]$, $[a_j, b_j]$ en què $b_i = a_j$ i $*_j$ tingui divisors de zero, aleshores $*_i$ és una t-norma. Considerem la suma ordinal d'aquesta família:*

$$x * y = \begin{cases} x *_m y & \text{si } \exists m \text{ tal que } \langle x, y\rangle \in [a_m, b_m]^2, \\ \min\{x, y\} & \text{altrament.} \end{cases}$$

Llavors, $*$ és una t-subnorma. Si a més tenim que $*_i$ és una t-norma per tot interval $[a_i, b_i]$ de la família tal que $b_i = 1$, llavors $*$ és una t-norma.

Resumint, es pot generalitzar l'operació de suma ordinal a t-subnormes, requirint que tot sumand que en tingui un altre amb divisors de zero a continuació sigui una t-norma. Si volem que la suma ordinal sigui una t-norma, cal a més imposar que l'últim sumand, si existeix, sigui una t-norma. D'altra banda, és obvi que la suma ordinal serà contínua per l'esquerra si, i només si, ho és cada sumand.

Ara bé, això no ens dóna pas un teorema de representació perquè en general una t-norma contínua per l'esquerra no és igual a la suma ordinal de les t-subnormes definides per les seves restriccions a intervals d'extrems idempotents. En efecte, donats $a, b \in [0,1]$ elements idempotents, és cert que la restricció de la t-norma a $[a, b)$ és una t-subnorma arquimediana, però en general si x, y pertanyen a diferents intervals d'aquest tipus no és cert que

$x * y = \min\{x, y\}$. A més, no disposem de cap classificació de les t-subnormes arquimedianes.

També es pot generalitzar l'operació per tal de sumar MTL-cadenes en general (seguint la idea de Hájek a [50] per BL-cadenes) de la següent manera:

Definició 32. *Sigui I un conjunt totalment ordenat i $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ una família de MTL-cadenes. Podem suposar que donats $i, j \in I$ tals que j sigui el successor de i tenim $1^{\mathcal{A}_i} = 0^{\mathcal{A}_j}$ i $A_i \cap A_j = \{1^{\mathcal{A}_i}\}$ (si no és així podem prendre àlgebres isomorfes que satisfacin aquesta condició). Es defineix la seva suma ordinal $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i$ com l'àlgebra que té com a domini $\bigcup_{i \in I} A_i$ i l'ordre i les operacions definits de la següent manera:*

$$x \leq y \text{ sii} \begin{cases} \exists i \in I \text{ tal que } x, y \in A_i \text{ i } x \leq_i y, \text{ o} \\ \exists i, j \in I \text{ tals que } i < j, x \in A_i, y \in A_j \end{cases}$$

$$x * y = \begin{cases} x *_i y & \text{si existeix } i \in I \text{ tal que } x, y \in A_i \\ \min\{x, y\} & \text{altrament} \end{cases}$$

$$x \to y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ x \to_i y & \text{si existeix } i \in I \text{ tal que } x, y \in A_i \\ y & \text{si } \exists i, j \in I \text{ tals que } i < j, y \in A_i, x \in A_j \end{cases}$$

Si i_0 és el mínim de I, prenem $0^{\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i} = 0^{\mathcal{A}_{i_0}}$. Si aquest mínim no existeix, afegim un element nou com a $0^{\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i}$.

Si i_1 és el màxim de I, prenem $1^{\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i} = 1^{\mathcal{A}_{i_1}}$. Si aquest màxim no existeix, afegim un element nou com a $1^{\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i}$.

Aquesta construcció permet generalitzar el teorema de representació en sumes ordinals a un cert tipus de BL-cadenes, a saber les BL-cadenes *saturades*. Observem que hi ha algunes BL-cadenes que són molt properes a ésser descomposables en suma ordinal. Per exemple, sigui $\mathcal{A}$ la Π-cadena isomorfa a $[0, 1]_\Pi$ que té com a domini $[0, 1/2]$ i sigui $\mathcal{B}$ la Π-cadena isomorfa a $[0, 1]_\Pi$ que té com a domini $[1/2, 1]$. Considerem la subàlgebra de $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ que té com a domini $[0, 1] \setminus \{1/2\}$. A aquesta cadena li falta l'element $1/2$ (i que sigui idempotent) per a ésser la suma ordinal de dues Π-cadenes. Per aquest motiu, distingirem entre les cadenes que tenen tots els idempotents necessaris per a fer la descomposició (les anomenades *saturades*) i la resta.

Definició 33. *Sigui $\mathcal{A}$ una BL-àlgebra i $X, Y \subseteq A$. El parell $\langle X, Y \rangle$ és un tall de $\mathcal{A}$ sii es satisfan les següents:*

1. $X \cup Y = A$,

2. $x \leq y$, *per tot* $x \in X$ *i* $y \in Y$,

3. Y *és tancat per* $*$, *i*

4. $x * y = x$, *per tot* $x \in X$ *i* $y \in Y$.

$\mathcal{A}$ *és saturada sii per tot tall* $\langle X, Y \rangle$ *hi ha un idempotent* $u \in A$ *tal que* $x \leq u \leq y$ *per tot* $x \in X$ *i* $y \in Y$.

Teorema 34 ([50]). *Tota BL-cadena* $\mathcal{A}$ *es pot submergir (amb una immersió* h*) en una BL-cadena saturada* $\overline{\mathcal{A}}$ *de tal manera que la imatge de* $\mathcal{A}$ *és densa en* $\overline{\mathcal{A}}$*, és a dir, per tota parella* $u < v \in \overline{A} \setminus A$*, existeix* $a \in A$ *tal que* $u < h(a) < v$.

Definició 35. *Una BL-cadena* $\mathcal{A}$ *és irreductible sii no hi ha dues BL-cadenes no-trivials* $\mathcal{A}_1$ *i* $\mathcal{A}_2$ *tals que* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$.

Teorema 36 ([50]). *Tota BL-cadena saturada és una suma ordinal de BL-cadenes irreductibles.*

Aquest resultat és millorat posteriorment per Cignoli, Esteva, Godo i Torrens:

Teorema 37 ([14]). *Tota BL-cadena saturada* $\mathcal{A}$ *és una suma ordinal de BL-cadenes irreductibles. Les components d'aquesta suma són G-cadenes, MV-cadenes o* Π*-cadenes. A més:*

1. $\mathcal{A}$ *és SBL-cadena sii no té divisors de zero sii la primera component no és MV o bé no hi ha primera component.*

2. $\mathcal{A}$ *no és SBL-cadena sii té divisors de zero sii té una primera component que és MV.*

5 Teoremes de completesa estàndard

Hem introduït, d'una banda, uns càlculs axiomàtics per a les lògiques borroses i, d'altra banda, una semàntica basada en t-normes i els seus residus per a modelitzar les connectives de fusió i d'implicació respectivament. Tanmateix la completesa que hem enunciat no és per a aquesta semàntica de t-normes sinó per l'algebraica. Aquest ha estat, i continua essent de fet, un tema d'intensa recerca en lògica borrosa: l'intent d'obtenció de proves de completesa estàndard, és a dir, mostrar l'equivalència dels sistemes deductius donats per càlculs d'estil Hilbert amb les semàntiques estàndard basades en t-normes. Alguns cops aquesta completesa s'ha demostrat només per als teoremes de la lògica en qüestió, d'altres també per a derivacions a partir de teories finites i en alguns casos fins i tot s'ha obtingut la igualtat dels operadors de conseqüència (en aquests casos s'anomena *completesa estàndard forta*). A continuació repassem breument aquests resultats i les idees en què es basen llurs proves.

Observació 2. *Els teoremes de completesa estàndard tenen una traducció algebraica que val la pena remarcar. Sigui L la lògica MTL o una extensió axiomàtica de MTL qualsevol i $\mathcal{A}$ una L-àlgebra qualsevol. Són equivalents:*

(i) $\mathbb{V}(\mathcal{A}) = \mathbb{L}$.

(ii) Per tota $\varphi \in Fm_{\mathcal{L}}$, $\vdash_L \varphi$ *sii* $\mathcal{A} \models \varphi \approx 1$.

En efecte:

(i) $\Rightarrow$ *(ii) Observem que (i) implica que la varietat* $\mathbb{L}$ *i l'àlgebra satisfan el mateix conjunt d'identitats. Denotem aquests conjunts amb* $Id(\mathbb{L})$ *i* $Id(\mathcal{A})$ *respectivament. Sigui* $\varphi \in Fm_{\mathcal{L}}$ *tal que* $\nvdash_L \varphi$. *Llavors* $\varphi \approx 1 \notin Id(\mathbb{L}) = Id(\mathcal{A})$, *per tant,* $\mathcal{A} \not\models \varphi \approx 1$.

(ii) $\Rightarrow$ *(i) Sigui* $\varphi \approx \psi \in Eq_{\mathcal{L}}$ *una equació qualsevol. Llavors tenim aquesta sèrie d'equivalències:* $\mathbb{L} \models \varphi \approx \psi$ *sii* $\vdash_L \varphi \leftrightarrow \psi$ *sii* $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \psi \approx 1$ *sii* $\mathcal{A} \models \varphi \approx \psi$ *sii* $\mathbb{V}(\mathcal{A}) \models \varphi \approx \psi$. *Per tant, si satisfan les mateixes identitats,* $\mathbb{V}(\mathcal{A})$ *i* $\mathbb{L}$ *han de ser la mateixa varietat.*

Observem que l'equivalència també és certa si substituim $\mathcal{A}$ *per una classe de L-àlgebres.*

5.1 Lògica de Łukasiewicz

La primera prova de completesa estàndard per a teoremes que es va obtenir va ser la de lògica de Łukasiewicz. La que resumirem a continuació (seguint la presentació que en fa Hájek a [49]) és la de Chang ([9, 10]), que introdueix les MV-àlgebres i les relaciona amb els grups abelians reticulats. Rose i Rosser ([81]), Cignoli ([12]) i Panti ([77]) n'han donat proves alternatives completament diferents. Hay va demostrar a més la completesa per a teories finites ([52]).

Definició 38. *Un o-grup és una estructura de primer ordre de la forma* $\mathcal{G} = \langle G, +, -, 0, \leq \rangle$ *en què* $\langle G, +, -, 0 \rangle$ *és un grup abelià i* $\leq$ *és un ordre total compatible amb* $+$*.*

Teorema 39 (de Gurevich–Kokorin). *Sigui* $\mathcal{R}$ *l'o-grup dels nombres reals i sigui* $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ *una fórmula sense quantificadors en el llenguatge dels o-grups. Si* $\mathcal{R} \models \forall x_0 \dots \forall x_n \varphi(x_0, \dots, x_n)$*, llavors* $\mathcal{G} \models \forall x_0 \dots \forall x_n \varphi(x_0, \dots, x_n)$ *per tot o-grup* $\mathcal{G}$*.*

Definició 40. *Sigui* $\mathcal{G} = \langle G, +, -, 0, \leq \rangle$ *un o-grup i* $e \in G$ *tal que* $e > 0$*. Considerem l'àlgebra* $MV(\mathcal{G}, e) = \langle [0, e], \rightarrow, 0 \rangle$ *en què* $\rightarrow$ *es defineix com:* $a \rightarrow b = 1$ *si* $a \leq b$ *i* $a \rightarrow b = e - a + b$ *altrament.*

Teorema 41. *Per tot o-grup* $\mathcal{G}$ *i per tot* $e > 0$*,* $MV(\mathcal{G}, e)$ *és una MV-cadena. A més, per tota MV-cadena* $\mathcal{A}$ *hi ha un o-grup* $\mathcal{G}$ *i un* $e > 0$ *tals que* $\mathcal{A} = MV(\mathcal{G}, e)$*.*

Teorema 42. *La lògica de Łukasiewicz té completesa estàndard per a teories finites, és a dir, per qualsevol conjunt finit* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ *tenim:* $\Sigma \vdash_L \varphi$ *sii* $\Sigma \models_{[0,1]_L} \varphi$*.*

Prova: La correcció és evident ja que val per a tota la classe de MV-àlgebres. Només cal provar la completesa. Suposem doncs que $\Sigma \nvdash_L \varphi$, aleshores per completesa respecte de cadenes, existeixen una MV-cadena $\mathcal{A}$ i una valoració v en $\mathcal{A}$ tals que $v[\Sigma] \subseteq \{1\}$ i $v(\varphi) < 1$. Això significa que hi ha una n-pla $\overline{a}$ de valors de A tal que $\psi^{\mathcal{A}}(\overline{a}) = 1^{\mathcal{A}}$ per tota $\psi \in \Sigma$ i $\varphi^{\mathcal{A}}(\overline{a}) < 1^{\mathcal{A}}$. Pel teorema anterior sabem que hi ha un o-grup $\mathcal{G}$ i un $e > 0$ tals que $\mathcal{A} = MV(\mathcal{G}, e)$. Per tant, també tenim $\psi^{\mathcal{G}}(\overline{a}) = e$ per tota $\psi \in \Sigma$, $\varphi^{\mathcal{G}}(\overline{a}) < e$ i $0 < \overline{a} < e$. Pel Teorema de Gurevich–Kokorin, això també val a $\mathcal{R}$. Dividim per e i obtenim el resultat en l'interval unitat, per tant tenim una valoració sobre l'àlgebra estàndard $[0, 1]_L$ que satisfà Σ i no satisfà φ. $\square$

Observació 3. *La completesa estàndard forta per a la lògica de Łukasiewicz no és certa. De fet, es pot mostrar fàcilment que la relació de conseqüència*

$\models_{[0,1]_L}$ *no és ni tan sols finitària. Per exemple, prenem* $\Sigma = \{p \oplus \ldots^n \oplus p \to q : n \geq 1\} \cup \{\neg p \to q\}$. *Llavors resulta que* $\Sigma \models_{[0,1]_L} q$ *mentre que per tot* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ *finit* $\Sigma \not\models_{[0,1]_L} q$. *En efecte, si* n *és el màxim tal que* $p \oplus \ldots^n \oplus p \to q \in \Sigma_0$ *llavors prenem una valoració* v *tal que* $v(p) \neq 0$, $nv(p) \leq v(q) < 1$ *i* $v(\neg p) \leq v(q)$, *i ja tindrem que la implicació no es satisfà.*

5.2 Lògica del Producte

Per la lògica Π la completesa estàndard per a teories finites va ser demostrada per Hájek, Godo i Esteva a [48] de manera molt similar al cas de Łukasiewicz.

Definició 43. *Sigui* $\mathcal{G} = \langle G, +, -, 0, \leq\rangle$ *un o-grup. Sigui* $Neg(\mathcal{G}) = \{g \in G : g \leq 0\}$ *el conjunt dels elements negatius del grup i sigui* $-\infty \notin Neg(\mathcal{G})$. *Considerem l'àlgebra* $\Pi(\mathcal{G}) = \langle Neg(\mathcal{G}) \cup \{-\infty\}, +, \to, \min, \max, -\infty, 0\rangle$ *en què* $\to$ *es defineix com:*
$a \to b = 0$, *si* $a, b \in Neg(\mathcal{G})$ *i* $a \leq b$,
$-\infty \to a = 0$, *si* $a \in Neg(\mathcal{G}) \cup \{-\infty\}$,
$a \to b = b - a$, *si* $a, b \in Neg(\mathcal{G})$ *i* $a > b$,
$a \to -\infty = -\infty$, *si* $a \in Neg(\mathcal{G})$.

Teorema 44. *Per tot o-grup* $\mathcal{G}$, $\Pi(\mathcal{G})$ *és una* Π*-cadena. A més, per tota* Π*-cadena* $\mathcal{A}$ *hi ha un o-grup* $\mathcal{G}$ *tal que* $\mathcal{A} = \Pi(\mathcal{G})$.

Aleshores, usant el Teorema de Gurevich–Kokorin anàlogament al cas de Łukasiewicz, s'obté:

Teorema 45 ([48]). *La lògica del Producte té completesa estàndard per a teories finites, és a dir, per qualsevol conjunt finit* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ *tenim:* $\Sigma \vdash_\Pi \varphi$ *sii* $\Sigma \models_{[0,1]_\Pi} \varphi$.

Observació 4. *Es pot construir un exemple semblant al que hem donat per a la lògica de Łukasiewicz per tal de mostrar que tampoc la relació de conseqüència* $\models_{[0,1]_\Pi}$ *és finitària i que, per tant, la lògica del Producte no té completesa estàndard forta.*

5.3 Lògica de Gödel

A diferència de les anteriors, la lògica de Gödel sí que gaudeix de completesa estàndard en la seva versió més forta.

Teorema 46 ([22]). *Per qualsevol conjunt (potser infinit)* $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ *tenim:* $\Sigma \vdash_G \varphi$ *sii* $\Sigma \models_{[0,1]_G} \varphi$.

Prova: Suposem que $\Sigma \nvdash_G \varphi$, per tant hi ha una G-cadena $\mathcal{A}$ i una valoració v en $\mathcal{A}$ tals que $v[\Sigma] \subseteq \{1^{\mathcal{A}}\}$ i $v(\varphi) < 1^{\mathcal{A}}$. Com que $Fm_{\mathcal{L}}$ és numerable, podem suposar que la cadena $\mathcal{A}$ és comptable. Per tant, existeix una aplicació injectiva $f : A \to [0,1]$ tal que sigui monòtona i faci $f(0^{\mathcal{A}}) = 0$ i $f(1^{\mathcal{A}}) = 1$. És obvi que en aquestes condicions f és una immersió de $\mathcal{A}$ a $[0,1]_G$. Per tant, prenent la valoració $f \circ v$ obtenim $\Sigma \not\models_{[0,1]_G} \varphi$. □

5.4 Lògica del Nilpotent Mínim

La completesa estàndard per a teoremes de la lògica NM ja va ser demostrada per Esteva i Godo a [26]. No obstant, aquí millorarem aquest resultat mostrant que, de forma molt semblant al cas de la lògica de Gödel, també val la completesa estàndard forta.

Teorema 47. *Per qualsevol conjunt (potser infinit) $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ tenim: $\Sigma \vdash_{NM} \varphi$ sii $\Sigma \models_{[0,1]_{NM}} \varphi$.*

Prova: Suposem que $\Sigma \nvdash_{NM} \varphi$; per tant hi ha una NM-cadena comptable $\mathcal{A}$ i una valoració v en $\mathcal{A}$ tals que $v[\Sigma] \subseteq \{1^{\mathcal{A}}\}$ i $v(\varphi) < 1^{\mathcal{A}}$. Sigui $f : A_+ \to (1/2, 1]$ una injecció monòtona tal que $f(1^{\mathcal{A}}) = 1$. Sigui A_- el conjunt dels elements negatius de $\mathcal{A}$ sense el punt fix per la negació (si en té). Així, podem definir una injecció $h : A \to [0,1]$, posant $h(a) := f(a)$ per tot $a \in A_+$, $h(a) := 1 - f(a)$ per tot $b \in A_-$, i $h(a) := 1/2$ si $a = \neg a$. h és una immersió i, per tant, el teorema queda demostrat prenent la valoració $f \circ v$. □

5.5 Lògica BL

La lògica BL va ser introduïda per Hájek a [49] amb la idea d'establir un fragment comú de les lògiques associades a t-normes contínues que es coneixien, és a dir, la de Łukasiewicz, la del Producte i la de Gödel. A més, en aquesta monografia, Hájek conjecturava que BL era la lògica corresponent a la classe de totes les t-normes contínues. Ell mateix va intentar provar aquest resultat a [50], però només va poder mostrar que BL estesa amb dos axiomes addicionals era completa per a teories finites respecte a la semàntica de les t-normes contínues. Posteriorment, Cignoli, Esteva, Godo i Torrens van provar que, de fet, els dos axiomes addicionals eren redundants i que, en conseqüència, la conjectura sobre BL era certa:

Teorema 48 ([14]). *La lògica BL té completesa estàndard per a teories finites, és a dir, per qualsevol conjunt finit $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ tenim: $\Sigma \vdash_{BL} \varphi$ sii $\Sigma \models_{[0,1]_*} \varphi$ per tota t-norma contínua $*$.*

Prova: Suposem de nou que $\Sigma \nvdash_{BL} \varphi$, per tant hi ha una BL-cadena comptable $\mathcal{A}$ i una valoració v en $\mathcal{A}$ tals que $v[\Sigma] \subseteq \{1^{\mathcal{A}}\}$ i $v(\varphi) < 1^{\mathcal{A}}$. Pel Teorema 34 podem suposar sense pèrdua de generalitat que $\mathcal{A}$ és saturada. Aleshores considerem, en virtut del Teorema 37, la seva descomposició en suma ordinal de components de tipus producte, Gödel i MV. Aplicant el Teorema de Gurevich–Kokorin com en les proves anteriors, obtenim un t-norma contínua i una valoració que fan les fórmules Σ certes i φ falsa. □

Veurem a continuació que aquest resultat no es pot millorar, ja que BL tampoc té completesa estàndard forta.[6]

Lema 49. *Sigui $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ (potser infinit) i sigui $\models_*$ la relació de conseqüència semàntica donada per la classe de totes les t-normes contínues. Si $\Sigma \models_{[0,1]_L} \varphi$, llavors $\Sigma, (Inv) \models_* \varphi$.*

Prova: Suposem que $\Sigma \models_{[0,1]_L} \varphi$ i prenem una t-norma contínua $*$ i una valoració $v : Fm_{\mathcal{L}} \to [0,1]_*$ tals que $v[\Sigma] \subseteq \{1\}$ i $v(Inv) = 1$. Cal veure que $v(\varphi) = 1$. És suficient provar que $v(Fm_{\mathcal{L}}) \in \mathbb{IS}([0,1]_L)$, ja que llavors v és una valoració sobre $[0,1]_L$ i podem aplicar la hipòtesi. Si $v(Fm_{\mathcal{L}}) = \mathcal{B}_2$ ja hem acabat. En cas contrari tenim una subàlgebra involutiva de $[0,1]_*$ amb més de dos elements. Considerem la descomposició de $[0,1]_*$ en suma ordinal de components irreductibles. Com que té elements involutius, cal que la suma ordinal tingui una primera component de tipus MV. Aleshores tots els elements de $v(Fm) \setminus \{1\}$ han de pertànyer a aquest primer sumand. Per tant, $v(Fm_{\mathcal{L}}) \in \mathbb{IS}([0,1]_L)$. □

Teorema 50. *BL no té completesa estàndard forta.*

Prova: Si la tingués llavors també la tindria Ł, ja que per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ valdria la següent cadena d'equivalències:
$\Sigma \vdash_L \varphi$ sii $\Sigma, (Inv) \vdash_{BL} \varphi$ sii $\Sigma, (Inv) \models_* \varphi$ sii $\Sigma \models_{[0,1]_L} \varphi$. □

5.6 Lògica SBL

La lògica SBL es comporta, pel què fa a teoremes de completesa estàndard, de manera totalment anàloga a BL. La seva completesa estàndard per a teories finites també fou demostrada a [14] usant la descomposició en suma ordinal de qualsevol SBL-cadena. Recordem que ara les t-normes contínues associades, les t-normes estrictes, satisfan l'axioma de pseudocomplementació i que això implica que no tenen divisors de zero.

[6] Aquesta demostració va ser elaborada conjuntament amb Félix Bou.

Teorema 51 ([14]). *La lògica SBL té completesa estàndard per a teories finites, és a dir, per qualsevol conjunt finit $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ tenim: $\Sigma \vdash_{SBL} \varphi$ sii $\Sigma \models_{[0,1]_*} \varphi$ per tota t-norma contínua i estricta $*$.*

Prova: Suposem de nou que $\Sigma \nvdash_{BL} \varphi$, per tant hi ha una SBL-cadena comptable i saturada $\mathcal{A}$ i una valoració v en $\mathcal{A}$ tals que $v[\Sigma] \subseteq \{1^{\mathcal{A}}\}$ i $v(\varphi) < 1^{\mathcal{A}}$. Aleshores considerem, en virtut del Teorema 37, la seva descomposició en suma ordinal de components de tipus producte, Gödel i MV. Sabem que no hi ha un primer sumand que sigui MV. Aplicant també el Teorema de Gurevich–Kokorin com en les proves anteriors, obtenim un t-norma contínua i estricta i una valoració que fan les fórmules Σ certes i φ falsa. $\square$

També de forma anàloga al cas de BL, hi afegim que no hi ha completesa estàndard forta.

Lema 52. *Sigui $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ (potser infinit) i sigui $\models_*$ la relació de conseqüència semàntica donada la classe de totes les t-normes contínues i estrictes. Si $\Sigma \models_{[0,1]_\Pi} \varphi$, llavors $\Sigma, (\Pi 1) \models_* \varphi$.*

Prova: Suposem que $\Sigma \models_{[0,1]_\Pi} \varphi$ i prenem una t-norma contínua i estricta $*$ i una valoració $v : Fm_{\mathcal{L}} \to [0,1]_*$ tals que $v[\Sigma] \subseteq \{1\}$ i $v(\Pi 1) = 1$. Cal veure que $v(\varphi) = 1$. És suficient com abans provar que $v(Fm_{\mathcal{L}}) \in \mathbb{IS}([0,1]_\Pi)$. Si $v(Fm_{\mathcal{L}}) = \mathcal{B}_2$ ja hem acabat. En cas contrari tenim una subàlgebra cancel·lativa de $[0,1]_*$ amb més de dos elements. Considerem la descomposició de $[0,1]_*$ en suma ordinal de components irreductibles. Aleshores tots els elements de $v(Fm) \setminus \{1\}$ han de pertànyer a un mateix sumand de tipus producte ja que altrament no es compliria la propietat de cancel·lació. $\square$

Teorema 53. *SBL no té completesa estàndard forta.*

Prova: També es demostra per reducció a l'absurd veient que si la tingués llavors també la tindria Π, ja que per tot $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ valdria la següent cadena d'equivalències:
$\Sigma \vdash_\Pi \varphi$ sii $\Sigma, (\Pi 1) \vdash_{SBL} \varphi$ sii $\Sigma, (\Pi 1) \models_* \varphi$ sii $\Sigma \models_{[0,1]_\Pi} \varphi$. $\square$

6 T-normes obtingudes com a completació de cadenes comptables i més teoremes de completesa estàndard

A [62] Jenei i Montagna introdueixen un mètode d'obtenció de t-normes contínues per l'esquerra que ha fet fortuna. Donada una MTL-cadena comptable, consisteix en construir una t-norma contínua per l'esquerra i una immersió de la cadena en la MTL-àlgebra definida per la t-norma. Aquest mètode ha permès demostrar teoremes de completesa estàndard per a un munt de lògiques borroses proposicionals i de primer ordre. En aquesta secció el presentarem en la seva màxima generalitat tal com apareix a [63].

Recordem que tots els monoides commutatius totalment ordenats integrals i residuats són continus per l'esquerra. Prenem-ne un de comptable, $\mathcal{A}$, i construim la seva completació a $[0,1]$. En primer lloc, cal submergir-lo en un monoide commutatiu totalment i densament ordenat, amb mínim, continu per l'esquerra, integral i numerable, $\mathcal{B}$. Jenei i Montagna ho fan de la següent manera:

- Si $\mathcal{A}$ no té mínim, s'hi afegeix un nou element $m \notin A$ i s'estén l'ordre de manera que sigui el mínim.
- $B := \{\langle m, 1\rangle\} \cup \{\langle a, q\rangle : a \in A \setminus \{m\}, q \in \mathbb{Q} \cap (0,1]\}$.
- Es dota B de l'ordre lexicogràfic.
- Es defineix en B la següent operació monoidal:

$$\langle a, q\rangle \circ \langle b, r\rangle := \begin{cases} min\{\langle a, q\rangle, \langle b, r\rangle\} & \text{si } a * b = min\{a, b\} \\ \langle a * b, 1\rangle & \text{altrament.} \end{cases}$$

Teorema 54 ([63]). *Sigui $\mathcal{A} = \langle A, *, \leq, 1\rangle$ un monoide commutatiu totalment i densament ordenat, amb mínim, continu per l'esquerra, integral i numerable. Aleshores:*

(1) $\mathcal{A}$ és isomorf a un monoide commutatiu totalment i densament ordenat, continu per l'esquerra i integral tal que el seu reducte reticular és $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ amb l'ordre natural.

(2) Existeix una t-norma contínua per l'esquerra i una immersió completa (és a dir, que preserva tots els suprems i ínfims) de $\mathcal{A}$ a la MTL-cadena definida per aquesta t-norma.

La demostració d'aquest teorema és ben senzilla. Per a la primera afirmació només cal tenir en compte el Teorema de Cantor segons el qual tot ordre lineal dens, numerable i amb extrems és isomorf a l'ordre dels racionals entre 0 i 1. Per a la segona, si h és l'isomorfisme amb $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, es defineix:

$$\forall \alpha, \beta \in [0,1] \quad \alpha \otimes \beta := sup\{h(x * y) : h(x) \leq \alpha, h(y) \leq \beta\}$$

i aleshores el propi h és la immersió completa desitjada. Es diu que la MTL-cadena resultant (o, fent un abús de llenguatge, la t-norma $\otimes$) és la completació de $\mathcal{A}$.

Observem que, de fet, tota t-norma contínua per l'esquerra és la completació d'un monoide commutatiu totalment i densament ordenat, continu per l'esquerra i integral. Concretament, és la completació de la subàlgebra generada per $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Aquesta construcció ens forneix alguns nous teoremes de completesa estàndard:

Teorema 55. *Sigui $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ un conjunt fórmules qualssevol (possiblement infinit). Tenim:*

- $\Gamma \vdash_{MTL} \varphi$ *sii* $\Gamma \models_{[0,1]_*} \varphi$ *per tota t-norma* $*$ *contínua per l'esquerra.*
- $\Gamma \vdash_{SMTL} \varphi$ *sii* $\Gamma \models_{[0,1]_*} \varphi$ *per tota t-norma* $*$ *contínua per l'esquerra i estricta.*
- $\Gamma \vdash_{WNM} \varphi$ *sii* $\Gamma \models_{[0,1]_*} \varphi$ *per tota t-norma* $*$ *WNM.*

Prova: Les implicacions d'esquerra a dreta són conseqüència dels teoremes de completesa algebraics que hem enunciat. Per demostrar les altres implicacions es procedeix per contraposició. Per exemple, suposem que hi ha $\Gamma \nvdash_{MTL} \varphi$. Aleshores per completesa respecte cadenes existeixen una MTL-cadena $\mathcal{A}$ i una valoració $v : Fm_{\mathcal{L}} \to \mathcal{A}$ tals que $v[\Gamma] \subseteq \{1^{\mathcal{A}}\}$ i $v(\varphi) \neq 1^{\mathcal{A}}$. Ens podem restringir a la subàlgebra generada per $v[Fm_{\mathcal{L}}]$, que òbviament és comptable. Per tant, podem suposar que $\mathcal{A}$ és una cadena comptable. Aleshores, per la construcció de Jenei i Montagna, existeix una t-norma $*$ contínua per l'esquerra i una immersió $h : \mathcal{A} \hookrightarrow [0,1]_*$. Per tant, prenem la valoració $h \circ v$ i ja tenim el contraexemple desitjat. Per provar les altres només cal observar que la completació d'una SMTL-cadena és també SMTL (fet a [25]) i el mateix per les WNM-cadenes. □

Per tal d'obtenir proves de completesa estàndard per les lògiques borroses amb involució, Esteva, Gispert, Godo i Montagna descriuen (vegeu [25]) una modificació del mètode de completació que construís t-normes involutives. Vegem-lo:

- Es parteix d'una IMTL-cadena comptable, $\mathcal{A}$.
- Per cada $a \in A$ es defineix $suc(a)$ com el successor de a en l'ordre de $\mathcal{A}$ si existeix o $suc(a) = a$ altrament.
- $B := \{\langle a, 1\rangle : a \in A\} \cup \{\langle a, q\rangle : \exists a' \in A$ tal que $a \neq a'$ i $suc(a') = a$, $q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)\}$.
- Es dota B de l'ordre lexicogràfic.
- Es defineix en B la mateixa operació monoidal que abans:

$$\langle a, q\rangle \circ \langle b, r\rangle := \begin{cases} min\{\langle a, q\rangle, \langle b, r\rangle\} & \text{si } a * b = min\{a, b\} \\ \langle a * b, 1\rangle & \text{altrament} \end{cases}$$

- L'operació anterior es modifica de la següent manera:

$$\langle a, q\rangle \times \langle b, r\rangle := \begin{cases} \langle 0^{\mathcal{A}}, 1\rangle & \text{si } a = suc(\neg b), q + r \leq 1 \\ \langle a, q\rangle \circ \langle b, r\rangle & \text{altrament} \end{cases}$$

- $\mathcal{B} = \langle B, \times, \wedge, \vee, \langle 0^{\mathcal{A}}, 1\rangle, \langle 1^{\mathcal{A}}, 1\rangle\rangle$ és un monoide commutatiu totalment i densament ordenat, fitat, continu per l'esquerra, integral i numerable.
- $\Phi(a) = \langle a, 1\rangle$ és un homomorfisme del corresponent fragment de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.
- $\forall a, b \in A$ $\Phi(a \to b)$ és el residu de $\Phi(a)$ i $\Phi(b)$ en $\mathcal{B}$.
- $\forall b \in B$ el residu de b i 0 existeix i l'escrivim $\neg b$. $\neg$ és una negació involutiva en $\mathcal{B}$.
- Es considera una bijecció h entre B i $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ i, com abans, es defineix:

$$\forall \alpha, \beta \in [0, 1] \quad \alpha \otimes \beta := sup\{h(x * y) : h(x) \leq \alpha, h(y) \leq \beta\}$$

- $\otimes$ és una t-norma contínua per l'esquerra i involutiva i $h \circ \Phi$ és una immersió de $\mathcal{A}$ en la IMTL-àlgebra associada a $\otimes$.

Així es pot demostrar:

Teorema 56. *Sigui $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ un conjunt fórmules qualssevol (possiblement infinit). Tenim:*

$\Gamma \vdash_{IMTL} \varphi$ sii $\Gamma \models_{[0,1]_*} \varphi$ per tota t-norma $*$ contínua per l'esquerra amb negació induïda involutiva.

7 Els punts de continuïtat de les t-normes contínues per l'esquerra

Jenei i Montagna estudien a [64] el conjunt de punts de continuïtat d'una t-norma contínua per l'esquerra i ho posen en relació amb la construcció de completació vista en l'apartat anterior.

D'entrada recordem que tota t-norma contínua per l'esquerra és la completació de la subàlgebra generada per $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Inversament també és cert que tota completació d'una t-norma en $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ contínua per l'esquerra és una t-norma en $[0,1]$ també contínua per l'esquerra. És natural preguntar-se en quins casos la completació proporciona una t-norma contínua o, en els casos en què no sigui així, com és el conjunt de punts de continuïtat.

En primer lloc és convenient estendre la noció de completació a qualsevol funció definida en un subconjunt dens d'un conjunt ordenat.

Definició 57 ([64]). *Sigui S un conjunt ordenat amb màxim i mínim. Sigui D un subconjunt dens de S i sigui $f(x,y)$ una funció creixent de D^2 a S. La funció $\hat{f}$ de S^2 a S definida per $\hat{f}(x,y) := sup\{f(d,e) : \langle d,e\rangle \in D, d \leq x, e \leq y\}$ és la completació de f.*

Lema 58. *Sigui D, f i $\hat{f}$ com en la definició anterior. Aleshores:*

(i) $\hat{f}$ *estén* f.

(ii) Si f és contínua per l'esquerra a D^2, llavors $\hat{f}$ també ho és a S^2.

Amb aquest llenguatge es pot caracteritzar el conjunt de punts de continuïtat d'una t-norma contínua per l'esquerra en termes de densitat de la següent manera:

Teorema 59 ([64]). *Sigui $*$ una t-norma en $[0,1]$. Són equivalents:*

(i) $*$ és contínua per l'esquerra.

(ii) $*$ és la completació d'una funció contínua en un subconjunt dens D de $[0,1]^2$.

(iii) $\langle [0,1], *, \rightarrow, \min, \max, 0, 1\rangle$ és isomorfa a la completació d'un reticle residuat en $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, on $\rightarrow$ és el residu de $*$.

(iv) $*$ és la completació d'una funció contínua per l'esquerra en un subconjunt dens D de $[0,1]^2$.

Corol·lari 60 ([64]). *Tota t-norma contínua per l'esquerra té un conjunt dens de punts de continuïtat.*

Per tant, el conjunt de punts de continuïtat és topològicament gran, és a dir, des del punt de vista de la densitat. També demostren que és gran en el sentit de la teoria de la mesura.

Definició 61. *Sigui X un espai topològic i $A \subseteq X$.*

- *A no és dens enlloc sii l'interior de la clausura de A és buit.*
- *A és magre o de primera categoria sii A és la unió d'una família comptable de conjunts que no són densos enlloc.*

Teorema 62 ([64]). *El conjunt de punts de discontinuïtat d'una t-norma contínua per l'esquerra és un conjunt de primera categoria i té mesura zero.*

Observem que la primera afirmació se segueix immediatament del fet que el conjunt de punts de continuïtat d'una funció real sempre és la intersecció d'una col·lecció comptable d'oberts (veure per exemple [82]). El teorema, a més, també és cert per a t-subnormes contínues per l'esquerra.

Sabem que el procés de completació preserva la continuïtat per l'esquerra, ara bé, no preserva en general la continuïtat. D'altra banda, no és cert que totes les t-normes en $[0,1]$ contínues per l'esquerra provinguin de completar una t-norma en $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ contínua.

Exemple 1 ([64]). *Sigui L_4 la MV-àlgebra de quatre elements tal que el seu domini és $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ i la seva operació monoidal és definida per $x * y = \max\{x + y - 1, 0\}$. Sigui $\circ$ la t-norma en $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ que s'obté aplicant a L_4 el procés de densificació descrit en l'apartat anterior i sigui $\hat{\circ}$ la seva completació en $[0,1]$. Veurem que $\hat{\circ}$ no és isomorfa a la completació de cap t-norma contínua en $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Observem d'entrada que $\hat{\circ}$ té una discontinuïtat a $\langle\langle \frac{1}{3}, 1\rangle, \langle \frac{1}{3}, 1\rangle\rangle$, ja que $\langle \frac{2}{3}, q\rangle$ tendeix a $\langle \frac{1}{3}, 1\rangle$ quan q s'acosta a 0, $\langle \frac{2}{3}, q\rangle \hat{\circ} \langle \frac{2}{3}, q\rangle = \langle \frac{1}{3}, 1\rangle$ mentre que $\langle \frac{1}{3}, 1\rangle \hat{\circ} \langle \frac{1}{3}, 1\rangle = \langle 0, 1\rangle$.*

Suposem que $\hat{\circ}$ fos isomorfa a la completació $\hat{\odot}$ d'una t-norma contínua $\odot$ en $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Sigui $I \subseteq [0,1]$ la imatge isomorfa de $(\langle \frac{1}{3}, 1\rangle, \langle \frac{2}{3}, 1\rangle]$ i sigui $\alpha \in [0,1]$ la imatge isomorfa de $\langle \frac{1}{3}, 1\rangle$. Sabem que $\hat{\odot}$ no és contínua en $\langle \alpha, \alpha\rangle$. $\hat{\circ}$ és constantment $\langle \frac{1}{3}, 1\rangle$ en $(\langle \frac{1}{3}, 1\rangle, \langle \frac{2}{3}, 1\rangle]^2$, per tant, $\hat{\odot}$ és constantment α en I^2. Sigui $\beta \in I \cap \mathbb{Q}$. Tenim $\beta \hat{\odot} \beta = \alpha$, per tant, $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Això és absurd, ja que $\hat{\odot}$ era contínua en $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Definició 63. *Una t-norma contínua per l'esquerra $*$ s'anomena feblement cancel·lativa si, i només si, la seva cadena associada és una ΠMTL-àlgebra.*

Proposició 64. *Sigui $*$ una t-norma contínua per l'esquerra. Són equivalents:*

(i) $*$ *és feblement cancel·lativa.*

(ii) $\forall a, b, c \in [0, 1]$, *si* $c > 0$ *i* $a * c = b * c$, *llavors* $a = b$.

(iii) $*$ *és estrictament creixent a* $(0, 1]^2$, *és a dir, si* $a, b, c \in [0, 1]$, $a < b$ *i* $c > 0$, *llavors* $a * c < b * c$.

Teorema 65 ([64]). *Tota t-norma contínua per l'esquerra que sigui estrictament creixent en* $(0, 1]^2$ *és la completació d'una t-norma en* $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ *contínua.*

Ara bé, ja sabem que en general la continuïtat no implica la divisibilitat, per tant, no és estrany el següent resultat:

Teorema 66 ([64]). *Existeix una t-norma contínua per l'esquerra que és estrictament creixent en* $(0, 1]^2$ *i en canvi no és la completació de cap àlgebra producte en* $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Finalment, Jenei i Montagna intenten caracteritzar aquelles t-normes en $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ per a les quals el procés de completació preserva la continuïtat. Donen la següent condició necessària:

Teorema 67 ([64]). *Sigui* $*$ *una t-norma en* $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ *contínua i sigui* $\hat{*}$ *la seva completació. Si* $\hat{*}$ *és contínua, aleshores per qualssevol* $a, b \in \mathbb{Q}$ *tals que* $a < b^n$ *per tot* $n \geq 1$, *tenim que* $a * b = a$.

Corol·lari 68 ([64]). *Si una t-norma en* $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ *és feblement cancel·lativa i existeixen* $a, b \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ *tals que* $0 < a < b^n$ *per tot* $n \geq 1$, *llavors la seva completació no és contínua.*

Tanmateix aquesta condició necessària no és suficient. La caracterització que ofereixen és un xic més complicada:

Teorema 69 ([64]). *Sigui* $*$ *una t-norma en* $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ *contínua i sigui* $\hat{*}$ *la seva completació. Són equivalents:*

(i) $\hat{*}$ *és contínua.*

(ii) Per qualssevol $r, q, b_1, \ldots, b_n, \ldots \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ *tals que* $r < q \leq b_1 \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots$ *existeix* $c \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ *tal que per gairebé tot* $n \geq 1$, $r < b_n * c \leq q$.

8 T-normes obtingudes per aniquilació d'una t-norma contínua amb una negació compatible

Jenei introdueix a [57] un altre mètode per a obtenir t-normes contínues per l'esquerra, que anomena *mètode d'aniquilació.*

Definició 70 ([57]). *Sigui* $*$ *una t-norma i* N *una funció de negació involutiva en* $[0,1]$. *Es defineix una operació binària* $*_N$, *l'*N-aniquilació de $*$, *a* $[0,1]$ *així:*

$$x *_N y = \begin{cases} x * y & \text{si } x > N(y), \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Aquesta operació no és en general una t-norma. Per exemple, sigui $*$ la t-norma del producte i N la negació involutiva estàndard, és a dir, $N(x) = 1 - x$. Aleshores, $*_N$ no és una t-norma, ja que no compleix la propietat associativa. En efecte, $0.5 *_N (0.3 *_N 0.9) = 0.5 *_N 0.27 = 0$ mentre que $(0.5 *_N 0.3) *_N 0.9 = 0.15 *_N 0.9 = 0.135 \neq 0$. Cal, doncs, caracteritzar en quins casos aquest mètode proporciona una t-norma. Observem que si volem obtenir-ne de contínues per l'esquerra podem partir d'una $*$ que sigui contínua, ja que en fer l'aniquilació la continuïtat total es pot perdre però la continuïtat per l'esquerra es mantidrà. En aquests casos Jenei descriu totalment la família de t-normes que s'obté:

Teorema 71 ([57]). *Sigui* $*$ *una t-norma contínua i* N *una funció de negació forta. Llavors* $*_N$ *és una t-norma si, i només si, és isormorfa a la t-norma de Łukasiewicz, a la t-norma nilpotent mínim o a:*

$$x \circ y = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 - y, \\ \frac{1}{3} + x + y - 1 & \text{si } x, y \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \text{ i } x > 1 - y, \\ \min(x, y) & \text{altrament.} \end{cases}$$

En altres paraules, si volem aconseguir una t-norma contínua per l'esquerra i involutiva (és a dir, una IMTL-àlgebra estàndard) a través del mètode d'aniquilació, només ho podem fer aniquilant trivialment la t-norma de Łukasiewicz amb la seva pròpia negació, aniquilant la t-norma del mínim i obtenir un nilpotent mínim o aniquilant un suma ordinal en què la component central és la t-norma de Łukasiewicz i la resta són mínims.

Una generalització natural d'aquest mètode consisteix en usar qualsevol tipus de negació, no només involutives, per a fer aniquilacions de t-normes contínues. Això és el que estudien Cignoli, Esteva, Godo i Montagna a [13].

Definició 72 ([13]). *Sigui $*$ una t-norma i n una funció de negació qualsevol en $[0,1]$. Es defineix una operació binària $*_n$, l'n-*aniquilació *de $*$, a $[0,1]$ així:*

$$x *_n y = \begin{cases} x * y & \text{si } x > n(y), \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Lema 73 ([13]). *L'operació binària $*_n$ satisfà les següents propietats:*

(i) És commutativa.

(ii) És monòtona en les dues variables.

(iii) $x *_n 0 = 0$ per tot $x \in [0,1]$.

(iv) $x *_n 1 = x$ per tot $x \in [0,1]$.

(v) Té el següent residu:

$$x \Rightarrow y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y, \\ n(x) \vee (x \to y) & \text{altrament.} \end{cases}$$

(vi) $n(x) = x \Rightarrow 0$ sii $n(x) \geq x \to 0$.

Tanmateix, ja sabem que, malgrat tenir totes aquestes propietats, $*_n$ no és en general una t-norma. En els casos en què ho sigui direm que la negació n és compatible amb $*$.

Teorema 74 ([13]). *Una negació n és compatible amb $*$ sii:*

(i) $\neg x \leq n(x)$ per tot $x \in [0,1]$ (on $\neg$ és la negació de l'àlgebra associada a $*$) i

(ii) Si $y > n(z)$, llavors $n(y * z) = n(y) \vee (y \to n(z))$.

Aquesta caracterització permet descriure com són les negacions compatibles amb una t-norma contínua donada.

Definició 75 ([13]). *Donada una negació n a $[0,1]$, un segment $[a,b] \subseteq [0,1]$ és:*

1. positiu *respecte a n sii $n(b) \leq a$.*
2. semipositiu *respecte a n sii $b > n(b) > a$.*
3. negatiu *respecte a n sii $n(b) \geq b$.*

Donada una t-norma contínua i la seva descomposició en suma ordinal, direm que una component de la suma definida en l'interval $[a, b]$ és positiva respecte a n (resp. semipositiva, negativa) sii $[a, b]$ és positiu respecte a n (resp. semipositiu, negatiu).

Teorema 76 ([13]). *Sigui $*$ una t-norma contínua i n una funció de negació. Llavors n és compatible amb $*$ sii es satisfan les següents condicions:*

(i) *Si $[a, b]_*$ és una component de Łukasiewicz positiva i $n(b) < a$, llavors n és constant en $[a, b]$.*

(ii) *Si $[a, b]_*$ és una component de Łukasiewicz positiva i $n(b) = a$, llavors n és la negació de Łukasiewicz corresponent a $(a, b]$, i.e. $n(x) = x \to a$ per tot $x \in (a, b]$.*

(iii) *Si $[a, b]_*$ és una component producte positiva i $n(b) < a$, llavors n és constant en $(a, b]$.*

(iv) *Si $[a, b]_*$ és una component producte positiva i $n(b) = a$, llavors n és la negació del producte corresponent a $(a, b]$, i.e. $n(x) = a$ per tot $x \in (a, b]$.*

(v) *Si $[a, b]_*$ és una component de Łukasiewicz o producte semipositiva, llavors n coincideix en $(n(b), b]$ amb la negació de Łukasiewicz, i.e. $n(x) = x \to n(b)$ per tot $x \in (n(b), b]$.*

(vi) *n pot ser arbitrària a cada component de Gödel i a cada component negativa.*

9 Algunes simplificacions del llenguatge de les lògiques borroses

Hem introduït MTL amb el llenguatge $\mathcal{L}(MTL) = \{*, \rightarrow, \wedge, 0\}$. La resta de connectives usuals eren definibles. D'entrada, doncs, tenim totes les lògiques borroses proposicionals escrites en aquest mateix llenguatge, ja que totes elles són extensions finitàries de MTL. No obstant, en algunes d'elles el llenguatge es pot simplificar i, de fet, tenen algunes presentacions ben conegudes en llenguatges més simples.

1. Recordem que BL demostra la llei de divisibilitat: $\vdash_{BL} \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \varphi * (\varphi \rightarrow \psi)$, per tant el seu llenguatge no necessita la conjunció additiva. Així tenim: $\mathcal{L}(BL) = \{*, \rightarrow, 0\}$.

2. A IMTL el fet de tenir una negació clàssica (és a dir, involutiva) fa que es puguin demostrar algunes equivalències interessants:

    - $\vdash_{IMTL} \varphi * \psi \leftrightarrow \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$, que ens donaria aquest llenguatge: $\mathcal{L}(IMTL) = \{\rightarrow, \wedge, 0\}$.
    - $\vdash_{IMTL} (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \neg(\varphi * \neg\psi)$, que permet que el llenguatge sigui també aquest: $\mathcal{L}(IMTL) = \{*, \neg, \wedge\}$.
    - També val la llei aquest llei de De Morgan: $\vdash_{IMTL} (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$. Per tant en els llenguatges anteriors la conjunció additiva es pot substituir per la disjunció additiva, obtenint: $\mathcal{L}(IMTL) = \{\rightarrow, \vee, 0\}$ o $\{*, \neg, \vee\}$.
    - A més, en el context involutiu (és a dir, a IMTL i a les seves extensions) de vegades es fa servir la disjunció multiplicativa enlloc de la conjunció multiplicativa perquè $\vdash_{IMTL} (\varphi * \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \oplus \neg\psi)$.

3. A la lògica de Gödel la contracció fa que les dues conjuncions sigui equivalents: $\vdash_G \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \varphi * \psi$. Per tant: $\mathcal{L}(G) = \{\wedge, \rightarrow, 0\}$.

4. A la lògica de Łukasiewicz hi valen les equivalències de IMTL i les de BL, per tant, el llenguatge admet vàries simplificacions. Per exemple: $\mathcal{L}(\text{Ł}) = \{\rightarrow, 0\}$, $\mathcal{L}(\text{Ł}) = \{*, \neg, 0\}$ o $\mathcal{L}(\text{Ł}) = \{\oplus, \neg, 0\}$.

S. M. Wang, B. S. Wang i Pei han definit a [88] la lògica de la t-norma que s'obté com a suma ordinal de $[0, 1/2]_{NM}$ i $[1/2, 1]_G$. En aquesta lògica, que anomenen NMG, hi han trobat unes noves fórmules d'equivalència que permeten que la disjunció additiva sigui definible en funció de $*$ i $\rightarrow$ (amb una fórmula $(D_\vee)$) i que la conjunció additiva sigui definible a partir de la disjunció additiva, la negació i $*$ (amb una fórmula $(D_\wedge)$). Tanmateix no es pregunten l'abast general d'aquestes fórmules. A l'article [38] (que es troba al primer apèndix d'aquest treball) hem portat a terme aquesta tasca, tot estudiant quines són les varietats definides per les traduccions d'aquestes fórmules[7]. També hem mostrat que $(D_\vee)$ correspon a una forma restringida de l'axioma de divisibilitat i que $(D_\wedge)$ conjuntament amb l'equació de la contracció feble resulta ésser equivalent a la contracció per a tot reticle residuat.

[7]Les versions prèvies d'aquest treball es troben a [24, 37].

10 Lògiques borroses amb valors de veritat parcial

Les lògiques borroses pretenen modelitzar la vaguetat. No obstant, fins ara els hem associat semàntiques que només tenen en compte el màxim valor de veritat, 1, per definir la relació de conseqüència. Una manera d'evitar aquesta omissió consisteix en introduir valors de veritat en el llenguatge per tal de referir-nos a graus de veritat parcials. Aquest és la idea amb la qual Pavelka a [79] va definir l'expansió PL de la lògica de Łukasiewicz afegint constants proposicionals $\overline{r}$ per als nombres reals r de l'interval unitat i certs axiomes per tractar amb elles. Aquesta lògica no tenia completesa estàndard com la de Łukasiewicz però almenys tenia un altre tipus de completesa (que posteriorment s'ha anomenat *completesa d'estil Pavelka*). Concretament, donada una teoria T i una fórmula φ es defineix el grau de veritat de φ respecte a T com:

$$\| \varphi \|_T := \inf\{v(\varphi) : v \text{ valoració a } [0,1] \text{ tal que } v[T] \subseteq \{1\}\},$$

d'altra banda es defineix el grau de provabilitat de φ respecte a T com:

$$| \varphi |_T := \sup\{r \in [0,1] : T \vdash_{PL} \overline{r} \to \varphi\}$$

i es demostra que aquests dos graus sempre coincideixen.

Hájek a [49] refina la idea de Pavelka fent l'expansió només amb constants per als nombres racionals i afegint els anomenats *book-keeping axioms*:

$$\overline{r} * \overline{s} \leftrightarrow \overline{r *_L s}$$
$$\overline{r} \to \overline{s} \leftrightarrow \overline{r \to_L s}$$

Demostra també per a aquesta lògica la completesa d'estil Pavelka.

Posteriorment, s'han estudiat altres expansions de les lògiques borroses amb constants per als racionals (vegeu [29]). Pavelka va demostrar que la completesa d'estil Pavelka requereix que les connectives siguin interpretades per funcions contínues. Això fa, que aquest tipus de completesa no sigui cert per la majoria d'expansions amb constants per a valors de veritat parcial de les lògiques borroses. Tanmateix, algunes d'aquestes lògiques admeten altres tipus de teoremes de completesa. En particular, a l'article [33] (al segon apèndix d'aquest treball) s'hi estudien les expansions amb constants per als racionals d'algunes extensions de WNM, entre elles la lògica de Gödel i la del Nilpotent Mínim[8] i es mostra que tenen completesa estàndard per a teoremes i completesa estàndard amb conjunts finits de premises quan ens restringim a les fórmules del tipus $\overline{r} \to \varphi$ (on φ és una fórmula del llenguatge inicial sense constants addicionals).

[8] Les versions prèvies d'aquest article es troben a [31, 32].

Referències

[1] R. Adillon and V. Verdú. On a contraction-less intuitionistic propositional logic with conjunction and fusion, *Studia Logica* 65 (2000) 11–30.

[2] P. Aglianó and F. Montagna. Varieties of BL-algebras I: general properties, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 181 (2003) 105–129.

[3] C. Alsina, E. Trillas and L. Valverde. On some logical connectives for Fuzzy Set Theory, *J. Math. An. and Appl.* 93 (1983) 15–26.

[4] Aristóteles. *Tratados de Lógica (Órganon) I*, Biblioteca Clásica Gredos vol. 51, Ed. Gredos, 1982, Madrid. Traducció de Miguel Candel Sanmartín.

[5] G. Birkhoff. *Lattice theory*, AMS Colloquim Publications, 1973.

[6] W. J. Blok and D. Pigozzi. Algebraizable logics, *Mem. Amer. Math. Soc.* 396, vol 77, 1989.

[7] D. Boixader, F. Esteva and L. Godo. On the continuity of t-norms on bounded chains, *Proc. of IFSA 1999*, 476–479.

[8] S. Burris and H. P. Sankappanavar. *A course in Universal Algebra.* Springer Verlag, New York, 1981.

[9] C.C. Chang. Algebraic analysis of many valued logics, *Trans. Amer. Math. Soc.* 88 (1958), 456–490.

[10] C.C. Chang. A new proof of the completeness of the Łukasiewicz axioms, *Trans. Amer. Math. Soc.* 93 (1959), 74–80.

[11] A. Ciabattoni, F. Esteva and L. Godo. T-norm based logics with n-contraction, *Neural Network World* 5 (2002), 441–452.

[12] R. Cignoli. Free lattice-ordered abelian groups and varieties of MV-algebras, In: *IX Latin American Symposium on Mathematical Logic*, 1993, pp. 113–118.

[13] R. Cignoli, F. Esteva, L. Godo and F. Montagna. On a class of left-continuous t-norms, *Fuzzy Sets and Systems* 131 (2002) 283–296.

[14] R. Cignoli, F. Esteva, L. Godo and A. Torrens. Basic Fuzzy Logic is the logic of continuous t-norms and their residua, *Soft Computing* 4 (2000) 106–112.

[15] R. Cignoli, I. M. L. D'Ottaviano and D. Mundici. *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning*, Trends in Logic, vol. 7 Kluwer, 2000.

[16] R. Cignoli and A. Torrens. An Algebraic Analysis of Product Logic, *Multiple Valued Logic* 5 (2000) 45–65.

[17] A. H. Clifford. Naturally totally ordered commutative semigroups, *Amer. L. Math.* 76 (1954) 631–646.

[18] A. C. Climescu. Sur l'équation fonctionelle de l'associativité, *Bull. École Polytechn. Iassy* 1 (1946) 1–16.

[19] R. P. Dilworth and M. Ward. Residuated Lattices, *Trans. Amer. Math.* 45 (1939) 335–354.

[20] A. Di Nola, F. Esteva, P. Garcia, L. Godo and S. Sessa. Subvarieties of BL-algebras generated by single-component chains, *Arch. Math. Logic* 41 (2002) 673–685.

[21] A. Di Nola, S. Sessa, F. Esteva, L. Godo and P. Garcia. The variety generated by perfect BL-algebras: an algebraic approach in a fuzzy logic setting, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 35 (2002) 197–214.

[22] M. Dummett. A propositional calculus with denumerable matrix, *J. Symbolic Logic* 24 (1959) 97–106.

[23] F. Esteva, X. Domingo. Sobre negaciones fuertes y débiles en $[0,1]$, *Stochastica* 4 (1980) 141–166.

[24] F. Esteva, A. García-Cerdaña and C. Noguera. On definability of maximum in left-continuous t-norms, *Proc. of EUSFLAT 2003*, 609–613.

[25] F. Esteva, J.Gispert, L. Godo and F. Montagna. On the standard and Rational Completeness of some Axiomatic extensions of Monoidal t-norm Based Logic, *Studia Logica* 71 (2002) 199–226.

[26] F. Esteva and L. Godo. Monoidal t-norm based Logic: Towards a logic for left-continuous t-norms, *Fuzzy Sets and Systems* 124 (2001) 271–288.

[27] F. Esteva, L. Godo and A. García-Cerdaña. On the hierarchy of t-norm based residuated fuzzy logics. In *Beyond Two: Theory and Applications of Multiple-Valued Logic*, Ed. M.Fitting and E.Orlowska, Springer-Verlag, 2003, 251–272.

[28] F. Esteva, L. Godo, P. Hájek and F. Montagna. Hoops and Fuzzy Logic, *J. Logic Computat.*, Vol. 13 No. 4 (2003) 531–555.

[29] F. Esteva, L. Godo, P. Hájek and M. Navara. Residuated fuzzy logics with an involutive negation, *Arch. Math. Logic* 39 (2000) 103–124.

[30] F. Esteva, L. Godo and F. Montagna. Varieties of BL-algebras generated by continuous t-norms and their residua, To appear in *Studia Logica* (2004).

[31] F. Esteva, L. Godo and C. Noguera. On Rational Gödel and Nilpotent Minimum Logics, *Proc. of IPMU 2004.*

[32] F. Esteva, L. Godo and C. Noguera. On Rational Weak Nilpotent Minimum Logics, *Proc. of ESTYLF 2004.*

[33] F. Esteva, L. Godo and C. Noguera. On Rational Weak Nilpotent Minimum Logics, Submitted to *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing.*

[34] J. Fodor. Nilpotent minimum and related connectives for fuzzy logic. *Proc. of FUZZ–IEEE'95*, 1995, pp. 2077–2082.

[35] J. M. Font, R. Jansana and D. Pigozzi, A Survey of Abstract Algebraic Logic, *Studia Logica* 74 (2003) 13–97.

[36] L. Fuchs. *Partially Ordered Algebraic Systems*, Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris, 1963.

[37] A. García-Cerdaña, C. Noguera and F. Esteva. On definability of additive connectives in fuzzy logics, *Proc. of IPMU 2004.*

[38] A. García-Cerdaña, C. Noguera and F. Esteva. On the scope of some formulas defining additive connectives in fuzzy logics, Submitted to *Fuzzy Sets and Systems.*

[39] J. Gispert. *Estudi Algebraic de les Extensions dels Càlculs Multivalorats de Łukasiewicz*, Universitat de Barcelona, 1998 (Tesi doctoral).

[40] J. Gispert. Universal Classes of MV-chains with Applications to Many-valued Logics, *Math. Log. Quart.* 48 (2002) 4, 581–601.

[41] J. Gispert. Axiomatic extensions of the nilpotent minimum logic, *Reports on Mathematical Logic* 37 (2003) 113–123.

[42] J. Gispert and A. Torrens. Quasivarieties generated by simple MV-algebras, *Studia Logica* 61 (1998) 79–99.

[43] J. Y. Girard. Linear Logic, *Theoretical Computer Science* 50 (1987), 1–102.

[44] K. Gödel. Zum intuitionistischen Aussagenkalkül, *Anzeiger Akademie der Wissenschaften Wien, Math. naturwiss. Klasse* 69 (1932), 65–66.

[45] J. A. Goguen. The logic of inexact concepts, *Synthese* 19 (1969) 325–373.

[46] S. Gottwald. *A Treatise on Many-valued Logics*, Studies in Logic and Computation 9, Research Studies Press Ltd., Baldock, UK, 2001.

[47] S. Gottwald, A. García-Cerdaña and F. Bou. Axiomatizing Monoidal Logic–A Correction, *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing* 9 (2003) 427–433.

[48] P. Hájek, L. Godo and F. Esteva. A complete many-valued logic with product-conjunction, *Arch. Math. Logic* 35 (1996) 191–208.

[49] P. Hájek. *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Trends in Logic, vol.4 Kluwer, 1998.

[50] P. Hájek. Basic fuzzy logic and BL-algebras, *Soft Computing* 2 (1998) 124–128.

[51] P. Hájek. Observations on the monoidal t-norm logic, *Fuzzy Sets and Systems* 132 (2002) 107–112.

[52] L. Hay. Axiomatization of the infinite-valued predicate calculus, *The Journal of Symbolic Logic* 28 (1963) 77–86.

[53] U. Höhle. Commutative, residuated l-monoids. In Höhle, U. and Klement. E.P. eds., *Non-Classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1995) 55–106.

[54] P. M. Idziak. *Lattice operations in BCK-algebras*, Jagiellonian University, 1983 (Tesi doctoral).

[55] P. M. Idziak. Lattice operations in BCK-algebras, *Mathematica Japonica* 29 vol. 6 (1984) 839–846.

[56] K. Iseki. BCK-algebras with condition (S), *Mathematica Japonica* 24 (1979) 107–119.

[57] S. Jenei. New family of triangular norms via contrapositive symmetrization of residuated implications, *Fuzzy Sets and Systems* 110 (1999) 157–174.

[58] S. Jenei. Structure of left-continuous triangular norms with strong induced negations, (I) Rotation construction, *J. Appl. Non-Classical Logics* 10 (2000) 83–92.

[59] S. Jenei. A note on the ordinal sum theorem and its consequences for the construction of triangular norms, *Fuzzy Sets and Systems* 126 (2002) 199–205.

[60] S. Jenei. Structure of Girard monoids on $[0,1]$, in: S. E. Rodabaugh, E. P. Klement (Eds.), *Topological and Algebraic Structures in Fuzzy Sets. A Handbook of Recent Developments in the Mathematics of Fuzzy Sets*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003, 277–308.

[61] S. Jenei. On the structure of rotation-invariant semigroups, *Archive for Mathematical Logic*, 42 (2003), 489-514.

[62] S. Jenei and F. Montagna. A proof of standard completeness for Esteva and Godo's logic MTL, *Studia Logica* 70 (2002) 183–192.

[63] S. Jenei and F. Montagna. A general method for constructing left-continuous t-norms, *Fuzzy Sets and Systems* 136 (2003) 263–282.

[64] S. Jenei and F. Montagna. On the continuity points of left-continuous t-norms, *Arch. Math. Logic* 42 (2003) 797–810.

[65] S. C. Kleene. On a notation for ordinal numbers, *J. Symbolic Logic* 3 (1938) 150–155.

[66] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap. *Triangular Norms*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[67] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap. Triangular norms. Position paper I: basic analytical and algebraic properties, *Fuzzy Sets and Systems* 143 (2004) 5–26.

[68] Y. Komori. Super Łukasiewicz propositional logics, *Nagoya Mathematical Journal*, 84 (1981) 119–133.

[69] W. Krull. Axiomatische Begründung der allgemeinen Idealtheorie, *Sitzungsberichte der physicalish medizinischen Societät der Erlangen* 56 (1924) 47–63.

[70] C. M. Ling. Representation of associative functions, *Publ. Math. Debrecen* 12 (1965) 189–212.

[71] J. Łukasiewicz and A. Tarski. Untersuchungen über den Aussagenkalkül. *Comptes Rendus de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie*, cl. iii 23 (1930) 1–21.

[72] K. Menger. Statistical metrics, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 8 (1942) 535–537.

[73] P. S. Mostert and A. L. Shields. On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary, *Annals of Math.* 65 (1957) 117–143.

[74] C. Noguera. *Lògiques borroses involutives.* Treball de DEA, Universitat de Barcelona, 2004.

[75] H. Ono. Proof-Theoretic Methods in Non-classical Logic: an Introduction. Theories of Types and Proofs, Takahashi et al eds. *MSJ Memoirs 2*, 1998, 207–254.

[76] H. Ono and Y. Komori. Logics without the contraction rule, *J. Symbolic Logic* 50 (1985) 169–201.

[77] G. Panti. A geometric proof of the completeness of the Łukasiewicz calculus, *Journal of Symbolic Logic* 60 (1995) 563–578.

[78] E. Post. Introduction to a general theory of elementary propositions, *Amer. J. Math.* 43 (1921) 163–185.

[79] J. Pavelka. On Fuzzy Logic I – III, *Z. Math. Logic Grunlag. Math* 25 (1979) 45–52, 119–134, 447–464.

[80] A. J. Rodríguez, *Un estudio algebraico de los cálculos proposicionales de Łukasiewicz*, Universitat de Barcelona, 1980 (Tesi doctoral).

[81] A. Rose, J. B. Rosser. Fragments of many-valued statement calculi, *Trans. Amer. Math. Soc.* 87 (1958) 1–53.

[82] H. L. Royden. *Real Analysis.* Macmillan Publishing Company Inc., New York, 1968.

[83] B. Schweizer, A. Sklar. Statistical metric spaces, *Pacific J. Math.* 10 (1960) 313–334.

[84] B. Schweizer, A. Sklar. Associative functions and abstract semigroups, *Publ. Math. Debrecen* 10 (1963) 69–81.

[85] B. Schweizer, A. Sklar. *Probabilistic metric spaces*, North-Holland, New York, 1983.

[86] S. Sessa and E. Turunen. Local BL-algebras, *Mult. Valued Logic* 6 (2001) 229–249.

[87] E. Trillas. Sobre funciones de negación en la teoría de conjuntos difusos, *Stochastica* 3 (1979) 47–60.

[88] S. M. Wang, B. S. Wang and D. W. Pei. A fuzzy logic for an ordinal sum t-norm. *Fuzzy Sets and Systems.*

[89] T. Williamson. *Vagueness*, Routledge, 1994.

[90] L. A. Zadeh. Fuzzy sets, *Inform. Control* 8 (1965) 338–353.