Lògiques borroses involutives

Carles Noguera i Clofent
IIIA-CSIC
cnoguera@iiia.csic.es

7 de setembre de 2004

Resum

El càlcul deductiu IMTL introduït per Esteva i Godo a [14] és la lògica de les t-normes contínues per l'esquerra amb negació associada involutiva i llurs residus, per tant, pot ser considerada la lògica borrosa involutiva bàsica. Com que la lògica infinitovalorada de Łukasiewicz és una extensió axiomàtica d'IMTL, l'estudi de les extensions finitàries d'IMTL és una generalització de la recerca feta sobre la lògica de Łukasiewicz. Si la contrapartida algebraica de la lògica de Łukasiewicz és la varietat de les MV-àlgebres introduïdes per Chang a [6, 7], la contrapartida d'IMTL és la varietat de les IMTL-àlgebres, que conté l'anterior. Per tal de conèixer la família de les lògiques borroses involutives, és a dir les extensions finitàries d'IMTL, es pot estudiar equivalentment l'estructura de les subquasivarietats d'$\mathbb{IMTL}$. En aquest treball recollim els primers resultats que han aparegut a la literatura sobre aquest problema (construccions d'IMTL-àlgebres [27, 29, 30], lògiques borroses involutives n-contractives [8] i extensions de la lògica del Nilpotent Mínim [20]) i hi afegim algunes contribucions originals referents a IMTL-àlgebres perfectes, rotacions connexes i inconnexes de semihoops bàsics, IMTL-àlgebres bipartides, IMTL-àlgebres n-contractives i les varietats que generen. A més, considerem la lògica associada a cadascuna d'aquestes varietats i decidim si tenen o no completesa estàndard.

Paraules clau: Àlgebres bipartides, àlgebres perfectes, IMTL-àlgebres, lògica algebraica, lògica borrosa, lògica infinito-valorada de Łukasiewicz, lògica multi-valorada, lògica subestructural, MTL-àlgebres, MV-àlgebres, reticles residuats, rotacions connexes i inconnexes, semihoops bàsics, t-normes contínues per l'esquerra, varietats.

1 Introducció

Jan Łukasiewicz (1878-1956) introdueix el 1918 el que es pot considerar el primer exemple de lògica multivalorada. Es tracta d'una lògica on, a més dels valors de veritat tradicionals de la Lògica Clàssica, *vertader* i *fals*, hi afegeix un valor intermedi: *possible*. Així, proposa un model per tractar el raonament amb proposicions que involucrin futurs contingents, és a dir, enunciats sobre fets del futur que encara no se sap si seran vertaders o falsos. Posteriorment, ho generalitza a lògiques n-valorades per cada n finit i àdhuc a una lògica infinitovalorada (veure [36]).

Concretament, per cada $n \geq 3$ la lògica de Łukasiewicz n-valorada es defineix sobre el conjunt de n valors veritat $\{0, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$ i, al seu torn, la lògica infinitovalorada es defineix sobre l'interval unitat real $[0, 1]$. En totes, Łukasiewicz defineix les següents funcions per interpretar les connectives de negació i d'implicació: $\neg x := 1 - x$ i $x \to y := \min\{1, 1 - x + y\}$. Les altres connectives usuals són definibles a partir d'aquestes dues. Aleshores, les lògiques queden determinades per una semàntica de matrius en què les àlgebres són els conjunts de valors de veritat amb les operacions de negació i d'implicació, i el valor distingit és 1. És a dir, si Γ és un conjunt de fórmules i φ és una fórmula, es defineix:

- $\Gamma \models_n \varphi$ si, i només si, per tota valoració v de les fórmules a $\langle\{0, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}, \neg, \to\rangle$ tal que $v[\Gamma] \subseteq \{1\}$, tenim $v(\varphi) = 1$.
- $\Gamma \models_\infty \varphi$ si, i només si, per tota valoració v de les fórmules a $\langle[0, 1], \neg, \to\rangle$ tal que $v[\Gamma] \subseteq \{1\}$, tenim $v(\varphi) = 1$.

Łukasiewicz mateix conjectura que les tautologies de la seva lògica infinitovalorada són els teoremes del sistema de Hilbert amb els axiomes

(Ł1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(Ł2) $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

(Ł3) $((\varphi \to \psi) \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$

(Ł4) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

(Ł5) $((\varphi \to \psi) \to (\psi \to \varphi)) \to (\psi \to \varphi)$

i amb la regla de Modus Ponens. Denotarem la relació de deductibilitat d'aquest sistema amb el símbol $\vdash_L$.

No és fins als anys 1958 i 1959 que, independentment, Rose i Rosser ([44]) i Chang ([6, 7]) demostren la conjectura.[1] La prova de Chang, a més, introdueix les MV-àlgebres per tal de dotar la lògica d'una semàntica algebraica. Cal remarcar també que Meredith mostra a [38] la redundància de l'axioma (Ł5) i que l'any 1963 Hay millora a [24] el resultat de completesa demostrant que en realitat el càlcul proposat per Łukasiewicz correspon al fragment finitari de la seva lògica infinitovalorada. Això és: per tot conjunt finit de fórmules $\Gamma \cup \{\varphi\}$, tenim: $\Gamma \models_\infty \varphi$ sii $\Gamma \vdash_L \varphi$. De fet, Wojcicki demostra a [45] que la lògica $\models_\infty$ no és finitària; per tant, que no correspon a cap sistema deductiu d'estil Hilbert.

Amb l'eclosió de la teoria de conjunts borrosos de Zadeh el 1965 (vegeu [46]), s'inaugura una nova etapa per a la lògica multivalorada. En efecte, es proposa interpretar les operacions conjuntistes (intersecció, reunió, complement) entre conjunts borrosos amb les funcions reals definides en $[0,1]$ que s'utilitzen per interpretar les connectives lògiques (conjunció, disjunció, negació) en certes lògiques multivalorades. D'aquesta manera aquestes lògiques s'usen per modelitzar el raonament amb predicats vagues, anomenant-les ara *lògiques borroses*. En particular, la lògica infinitovalorada de Łukasiewicz esdevé l'exemple paradigmàtic de lògica borrosa i es revitalitza la recerca en temes relacionats amb ella i les seves extensions. En particular, l'any 1981 Komori arriba a caracteritzar i classificar totes les extensions axiomàtiques de $\vdash_L$ a [34].

El 1989, la noció de contrapartida algebraica d'una lògica, que fins al moment s'havia utilitzat de manera intuïtiva, rep una formulació matemàtica precisa de la mà de Blok i Pigozzi a [4]. Defineixen la noció de *lògica algebritzable* com aquella lògica L per a la qual existeix una quasivarietat d'àlgebres $\mathbb{K}$ tal que la relació de deductibilitat de L i la conseqüència equacional associada a $\mathbb{K}$ són intertraduïbles. En particular, s'obté que aleshores hi ha un isomorfisme dual d'ordre entre les extensions finitàries de L i les subquasivarietats de $\mathbb{K}$. Aquesta teoria permet a més mostrar l'equivalència entre propietats lògiques de L i certes propietats algebraiques de $\mathbb{K}$, donant lloc al que s'ha anomenat *teoremes pont* (vegeu, per exemple, [16]).

Segons demostren Rodríguez, Torrens i Verdú a [43] l'any següent, la lògica $\vdash_L$ és una d'aquestes lògiques algebritzables en el sentit de Blok i Pigozzi i la seva semàntica algebraica equivalent és la varietat de les MV-

[1] L'any 1935 Mordchaj Wajsberg va anunciar que havia comprovat la conjectura, però mai no en va donar una prova.

àlgebres, que denotarem amb $\mathbb{MV}$[2]. Així, gràcies al treball de Komori per a trobar les extensions axiomàtiques de $\vdash_L$, s'obté una classificació les subvarietats de $\mathbb{MV}$. D'altra banda, per trobar aquelles extensions finitàries de $\vdash_L$ en què a més d'axiomes s'hi afegeixin regles d'inferència, cal classificar les subquasivarietats de $\mathbb{MV}$; part d'aquesta feina es troba feta a [21], [18] i [19].

Durant la darrera dècada la recerca en lògiques multivalorades, i especialment en lògiques borroses, ha pres una considerable embranzida en definir-se certes debilitacions de la lògica infinitovalorada de Łukasiewicz. Hájek ha introduït a [23] la lògica BL que és un sistema que té com a extensions $\vdash_L$ i altres lògiques borroses importants (la lògica de Gödel i la del Producte). S'ha vist que és algebritzable amb una semàntica equivalent, la de les BL-àlgebres, que inclou $\mathbb{MV}$ com a subvarietat. De fet, s'ha demostrat a [9] que també es pot aconseguir una semàntica per a la lògica BL prenent només aquelles BL-àlgebres definides sobre l'interval real $[0, 1]$, és a dir, aquelles donades per t-normes contínues i llur residu. Posteriorment, Esteva i Godo han introduït a [14] una lògica encara més dèbil, la lògica MTL, que és algebritzable mitjançant una varietat més gran, la de les MTL-àlgebres; a més s'ha vist a [31] que MTL és la lògica de les t-normes que contínues per l'esquerra i llurs residus.[3]

Tant BL com MTL són lògiques borroses no involutives, és a dir, que no demostren la llei d'involució de la negació $\neg\neg\varphi \to \varphi$, ni tampoc l'axioma Ł$_4$ de Łukasiewicz. De fet, en el mateix article [14] Esteva i Godo proposen la lògica IMTL com a aquella extensió finitària de MTL que s'obté en afegir com a axioma la llei d'involució. Concretament és la lògica donada en el llenguatge $\mathcal{L} = \{*, \to, \wedge, 0\}$ de tipus $(2, 2, 2, 0)$ pel càlcul d'estil Hilbert que té Modus Ponens com a regla d'inferència i els següents axiomes:

[2] En realitat, utilitzen unes àlgebres definicionalment equivalents a les MV-àlgebres que anomenen *àlgebres de Wajsberg*.

[3] Per una introducció més detallada a les lògiques borroses i llur algebrització remetem al treball [41].

(A1)	$(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$
(A2)	$\varphi * \psi \to \varphi$
(A3)	$\varphi * \psi \to \psi * \varphi$
(A4)	$\varphi \wedge \psi \to \varphi$
(A5)	$\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$
(A6)	$\varphi * (\varphi \to \psi) \to \varphi \wedge \psi$
(A7a)	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi * \psi \to \chi)$
(A7b)	$(\varphi * \psi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$
(A8)	$((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$
(A9)	$0 \to \varphi$
(A10)	$((\varphi \to 0) \to 0) \to \varphi$

Aquesta lògica resulta ser algebritzable mitjançant la varietat de les IMTL-àlgebres, $\mathbb{IMTL}$[4]. A més, a [13] es demostra que és la lògica de les t-normes contínues per l'esquerra amb negació involutiva i llurs residus; per tant, es pot considerar la lògica borrosa amb involució més dèbil. Òbviament, $\mathbb{MV} \subseteq \mathbb{IMTL}$; però la inclusió és estricta, car IMTL és una lògica estrictament més dèbil que la de Łukasiewicz (per exemple no demostra (Ł3)). Precisament, la lògica de Łukasiewicz és l'extensió d'IMTL obtinguda afegint (Ł3).

Per tant, l'estudi de les extensions finitàries d'IMTL o, equivalentment, de l'estructura de subquasivarietats d'$\mathbb{IMTL}$, serà una generalització del treball fet per a $\mathbb{MV}$. En aquest treball ens proposem recollir els primers resultats que s'han obtingut en aquesta direcció. A la segona secció introduirem amb precisió els conceptes algebraics que necessitarem al llarg de tota la dissertació. A la tercera secció prendrem la varietat de les MV-àlgebres com a primer exemple interessant (i el més estudiat) d'IMTL-àlgebres; resumirem les seves propietats bàsiques i la classificació de les seves subvarietats. A la quarta secció recollirem els mètodes de Jenei per a la construcció d'algunes IMTL-àlgebres ([27, 29, 30]) anomenats *rotació inconnexa*, *rotació connexa*, *rotació-aniquilació inconnexa* i *rotació-aniquilació connexa*. A la cinquena secció presentarem un treball original que generalitza i estudia a $\mathbb{IMTL}$ les nocions d'àlgebra perfecta i bipartida i les posem en relació amb les rotacions presentades a la secció anterior. La secció sisena és dedicada a una regió del reticle de subvarietats de $\mathbb{IMTL}$ totalment descrita per Gispert a [20]: la varietat de les NM-àlgebres. Dedicarem la darrera secció a les IMTL-àlgebres n-contractives, presentant-hi també alguns resultats originals.

[4]Se segueix per exemple del fet que, tal com demostren Adillon i Verdú a [1], H_{BCK} és una lògica algebritzable i IMTL és una extensió axiomàtica de H_{BCK}.

2 Conceptes algebraics bàsics

En aquesta secció introduirem les definicions fonamentals que necessitarem per tractar la lògica IMTL i les seves extensions i llurs contrapartides algebraiques. Assumirem en tot moment un coneixement elemental de l'Àlgebra Universal.[5]

Definició 1. *[14] Sigui $\mathcal{A} = \langle A, *, \rightarrow, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ una àlgebra de tipus $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$. $\mathcal{A}$ és una MTL-àlgebra si, i només si, és un reticle residuat fitat, commutatiu i integral (vegeu [11]) tal que satisfà l'equació de la prelinealitat:*

$$(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) \approx 1$$

$\mathcal{A}$ és una IMTL-àlgebra si, a més, satisfà l'equació de la involució:

$$\neg\neg x \approx x,$$

on la negació $\neg$ és una operació unària definida per: $\neg a := a \rightarrow 0$.

Es diu que $a \in A$ és punt fix si, i només si, $\neg a = a$. A [25] es demostra que el punt fix, si existeix, és únic.

Quan l'ordre reticular és total diem que $\mathcal{A}$ és una IMTL-cadena. Direm, a més, que és una IMTL-cadena estàndard si, i només si, el seu univers és l'interval unitat real $[0, 1]$. En aquest cas, tal com hem explicat al treball [41], el funcional $*$ s'ha d'interpretar amb una t-norma contínua per l'esquerra que indueixi una negació involutiva.

Denotarem la classe de totes les IMTL-àlgebres amb $\mathbb{IMTL}$.

Per tant, $\mathbb{IMTL}$ és una varietat i se'n pot aconseguir una base equacional partint d'una presentació equacional de la varietat dels reticles residuats i afegint-hi l'equació de la prelinealitat i la de la involució, obtenint per exemple:

1. $(x \wedge y) \wedge z \approx x \wedge (y \wedge z)$
2. $(x \vee y) \vee z \approx x \vee (y \vee z)$
3. $x \wedge y \approx y \wedge x$
4. $x \vee y \approx y \vee x$
5. $x \wedge x \approx x$
6. $x \vee x \approx x$

[5] Es pot trobar, per exemple, a [5].

7. $x \wedge (x \vee y) \approx x$

8. $x \vee (x \wedge y) \approx x$

9. $x \wedge 0 \approx 0$

10. $x \vee 1 \approx 1$

11. $(x * y) * z \approx x * (y * z)$

12. $x * y \approx y * x$

13. $x * 1 \approx x$

14. $x * (y \vee z) \approx (x * y) \vee (x * z)$

15. $x * y \to z \approx x \to (y \to z)$

16. $(x * (x \to y)) \wedge y \approx x * (x \to y)$

17. $x \wedge y \to y \approx 1$

18. $(x \to y) \vee (y \to x) \approx 1$

19. $\neg\neg x \approx x$

Aquesta varietat conté algunes subvarietats ben conegudes:

- La classe de les àlgebres de Boole, $\mathbb{BA}$, és la subvarietat d'$\mathbb{IMTL}$ definida per $x \vee \neg x \approx 1$. Denotarem amb $\mathcal{B}_2$ l'àlgebra de Boole de dos elements.
- La varietat de les MV-àlgebres, $\mathbb{MV}$, és la subvarietat d'$\mathbb{IMTL}$ obtinguda afegint a la base equacional d'$\mathbb{IMTL}$ alguna de les equacions següents: $x \to (x \to y) \approx y \to (y \to x)$, $x \vee y \approx x \to (x \to y)$ o $x \wedge y \approx x * (x \to y)$.
- $\mathbb{NM}$ és la varietat de les IMTL-àlgebres que satisfan $(x * y \to 0) \vee (x \wedge y \to x * y) \approx 1$.

$\mathbb{IMTL}$ és la contrapartida algebraica de la lògica IMTL. Concretament, IMTL és una lògica finitària algebritzable en el sentit de [4] tal que la seva varietat semàntica algebraica equivalent és $\mathbb{IMTL}$ i tal que les fórmules d'equivalència són $\{p \to q, q \to p\}$ i l'equació definidora és $p \approx 1$. Per tant, tenim l'isomorfisme dual entre les extensions finitàries de IMTL i les subquasivarietats de $\mathbb{IMTL}$. En particular, les que acabem d'enumerar són les semàntiques algebraiques equivalents de la lògica clàssica, la lògica de Łukasiewicz i la lògica del Nilpotent Mínim, respectivament. La varietat de les àlgebres de Boole només té una subquasivarietat pròpia, que és la generada per l'àlgebra trivial (l'àlgebra que només té un element i que trivialment satisfà totes les equacions); per tant, la lògica proposicional clàssica és maximal en el sentit que la seva única extensió és la lògica inconsistent. Pel que fa a les extensions de la lògica de Łukasiewicz, cal dir que totes les extensions axiomàtiques han estat classificades per Komori a [34]; per tant, equivalentment també es té una descripció exhaustiva de les subvarietats de MV-àlgebres. També les subquasivarietats han estat estudiades, per exemple a [18], [21] i [19]. Finalment, el reticle de subvarietats de $\mathbb{NM}$ ha estat totalment descrit a [20].

El nostre objectiu és contribuir al coneixement de les extensions finitàries de IMTL o, equivalentment, del reticle de subquasivarietats de $\mathbb{IMTL}$. A tal efecte, introduirem algunes definicions i alguns fets algebraics elementals més.

Proposició 2. $\mathbb{IMTL}$ *és una varietat aritmètica amb el següent terme de 2/3-minoria:* $m(x, y, z) = ((x \to y) \to z) \wedge ((z \to y) \to x) \wedge (x \vee z)$.

Definició 3. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra. Els conjunts d'elements positius i negatius de $\mathcal{A}$ es defineixen respectivament com:*
$A_+ := \{a \in A : a > \neg a\}$
$A_- := \{a \in A : a \leq \neg a\}$

Serà útil tenir en compte la següent caracterització d'aquests conjunts:

Proposició 4. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra. Llavors*
$A_+ = \{a \vee \neg a : a \in A,\ a \neq \neg a\}$
$A_- = \{a \wedge \neg a : a \in A\}$

Definició 5. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra. Un filtre és un subconjunt del domini, $F \subseteq A$, tal que:*

- $1 \in F$,
- *Si* $a \in F$ *i* $a \leq b$, *llavors* $b \in F$, *i*
- *Si* $a, b \in F$, *llavors* $a * b \in F$.

Un subconjunt $F \subseteq A$ és un filtre implicatiu si i només si:

- $1 \in F$

- *Si $a, a \to b \in F$, llavors $b \in F$*

Aquestes dues nocions coincideixen:

Proposició 6. *Sigui F un subconjunt del domini d'una IMTL-àlgebra. Llavors, F és un filtre implicatiu si, i només si, F és un filtre.*

Proposició 7. *El conjunt dels filtres d'una IMTL-àlgebra $\mathcal{A}$ és un sistema de clausura, és a dir, és una família de subconjunts d'A tancada per interseccions arbitràries i que conté A.*

Definició 8. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra i $B \subseteq A$ un subconjunt qualsevol. El filtre generat per B és el mínim filtre d'$\mathcal{A}$ que conté B, és a dir, la intersecció de tots els filtres que contenen B. El denotarem amb $\mathbb{F}i(B)$.*

Definició 9. *Si $\mathcal{A}$ és una IMTL-àlgebra i $a \in A$, definim $a^0 := 1$, $a^1 := a$ i per cada $n > 1$ $a^n := a^{n-1} * a$.*

Proposició 10. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra i $B \subseteq A$ un subconjunt qualsevol. Llavors el filtre generat per B es pot descriure així: $\mathbb{F}i(B) = \{a \in A : b_1^{n_1} * \ldots * b_k^{n_k} \leq a$ per certs $k, n_1, \ldots, n_k \geq 1$ i certs $b_1, \ldots, b_k \in B\}$.*

A més, tenim una bona correspondència entre els filtres i les congruències de les IMTL-àlgebres:

Proposició 11. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra. Per cada filtre $F \subseteq A$ definim $\Theta(F) := \{\langle a, b\rangle \in A^2 : a \leftrightarrow b \in F\}$, i per cada congruència $\theta \in Co(\mathcal{A})$ definim $Fi(\theta) := \{a \in A : \langle a, 1\rangle \in \theta\}$. Aleshores, Θ és un isomorfisme d'ordre entre el conjunt de filtres i el conjunt de congruències d'$\mathcal{A}$ i Fi és el seu invers.*

Atès que hi ha aquesta correspondència, farem un abús de llenguatge i escriurem $\mathcal{A}/F$ per referir-nos a l'àlgebra $\mathcal{A}/\Theta(F)$.

Proposició 12. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra i $F \subseteq A$ un filtre propi. Són equivalents:*

(i) *$\mathcal{A}/F$ és subdirectament irreductible.*

(ii) *F és $\cap$-completament irreductible.*

(iii) *F és maximal relatiu a un element, és a dir, existeix un element $a \in A$ tal que F és un element maximal del conjunt dels filtres propis que no contenen a, ordenat per la inclusió.*

Definició 13. *Sigui F un filtre d'una IMTL-àlgebra. F és propi si, i només si, $0 \notin F$. F és un filtre primer si, i només si, F és propi i $\forall a, b \in A$ si $a \vee b \in F$, llavors $a \in F$ o $b \in F$.*

Aquesta noció de filtre primer és equivalent a la que utilitzen Esteva i Godo a [14], tal com prova la següent proposició.

Proposició 14. *Sigui F un filtre propi d'una IMTL-àlgebra $\mathcal{A}$. F és primer si, i només si, per qualssevol $a, b \in A$ $a \to b \in F$ o $b \to a \in F$.*

Prova: Suposem que F és primer i prenguem $a, b \in A$. Tenim $(a \to b) \vee (b \to a) = 1 \in F$, per tant, per ser primer, $a \to b \in F$ o $b \to a \in F$. Recíprocament, suposem que $a \vee b \in F$. Llavors, $a \vee b = ((a \to b) \to b) \wedge ((b \to a) \to a) \in F$, per tant, $(a \to b) \to b, (b \to a) \to a \in F$. Suposem que $a \to b \in F$ (l'altre cas és anàleg). Llavors, per ser filtre implicatiu, $b \in F$. □

Proposició 15. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra i $F \subseteq A$ un filtre propi. Són equivalents:*

(i) *F és primer.*

(ii) *$\mathcal{A}/F$ és finitament subdirectament irreductible.*

(iii) *$\mathcal{A}/F$ és una cadena.*

Corol·lari 16. *Una IMTL-àlgebra $\mathcal{A}$ és finitament subdirectament irreductible si, i només si, per qualssevol $a, b \in A$ tals que $a \vee b = 1$, $a = 1$ o $b = 1$.*

Corol·lari 17. *Una IMTL-àlgebra $\mathcal{A}$ és finitament subdirectament irreductible si, i només si, és una cadena.*

A partir del teorema general de l'Àlgebra Universal segons el qual tota àlgebra és representable en producte subdirecte d'àlgebres subdirectament irreductibles i del corol·lari anterior, s'obté:

Teorema 18. *Tota IMTL-àlgebra és representable com a producte subdirecte d'IMTL-cadenes.*

Tenim, doncs, que les IMTL-àlgebres subdirectament irreductibles són una subclasse de les IMTL-cadenes, però no les tenim caracteritzades. Sí que podem, però, donar la següent condició suficient:

Proposició 19. *Si $\mathcal{A}$ és una IMTL-cadena amb un antiàtom, és subdirectament irreductible.*

Prova: Sigui a l'antiàtom, és a dir, $a = \max A \setminus \{1\}$. Aleshores és immediat comprovar que el filtre generat per a és el mínim de $Co(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta_{\mathcal{A}}\}$. $\square$

Tanmateix aquesta condició no és necessària. Si considerem l'àlgebra estàndard de Łukasiewicz $[0,1]_L$, veurem que es tracta d'una àlgebra subdirectament irreductible (de fet, és simple) que òbviament no té un antiàtom.

Utilitzant el Lema de Zorn és rutinari demostrar que per tot filtre propi F d'una IMTL-àlgebra, hi ha un filtre propi G tal que és un element maximal del conjunt dels filtres propis amb l'ordre donat per la inclusió i tal que $F \subseteq G$. A més, tot filtre maximal és primer.

Definició 20. *El radical d'una IMTL-àlgebra $\mathcal{A}$ és: $Rad(\mathcal{A}) := \bigcap\{M \subseteq A : M$ és un filtre maximal$\}$.*

Observem que en una cadena el conjunt dels filtres és totalment ordenat i que, per tant, el radical és el màxim filtre propi.

Proposició 21. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra i $F \subseteq A$ un filtre propi. Són equivalents:*

(i) *F és un filtre maximal.*

(ii) *$\mathcal{A}/F$ és simple.*

(iii) *Per qualsevol $a \in A$, $a \notin F$ sii $\neg a^n \in F$ per algun $n \leq 1$.*

3 La subvarietat de les MV-àlgebres

Com hem dit més amunt, les MV-àlgebres foren introduïdes per Chang ([6, 7]) per tal de dotar la lògica infinitovalorada de Łukasiewicz d'una semàntica algebraica. Aquí les tractem en el marc general de la Lògica Borrosa, o sia, com un tipus particular d'IMTL-àlgebres i, per tant, les presentem en un llenguatge diferent al de Chang. Així, recordem que per nosaltres una IMTL-àlgebra $\mathcal{A} = \langle A, *, \to, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ és una MV-àlgebra si, i només si, satisfà l'equació de la divisibilitat:

$$x \wedge y \approx x * (x \to y)$$

A continuació en destaquem alguns exemples:

1. Les àlgebres introduïdes originalment per Łukasiewicz per definir les seves lògiques multivalorades utilitzant una semàntica de matrius, resulten ser MV-àlgebres.

   Així, per cada $n \geq 2$, $\text{Ł}_n := \langle\{0, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}, *, \to, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ és la MV-cadena de n elements i $[0,1]_L := \langle[0,1], *, \to, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ és la MV-cadena estàndard, definides totes per les següents operacions: $a * b := \max\{0, a + b - 1\}$, $a \to b := \min\{1, 1 - a + b\}$, $a \wedge b := \min\{a, b\}$ i $a \vee b := \max\{a, b\}$. Observem que totes les MV-cadenes finites Ł_n són subàlgebres de $[0,1]_L$.

2. La subàlgebra de $[0,1]_L$ definida sobre l'interval unitat racional, $[0,1] \cap Q$. La denotarem com $([0,1] \cap Q)_L$.

3. Donat un grup abelià reticulat $\mathcal{G} = \langle G, \wedge, \vee, +, -, 0\rangle$ i un element $u \in G$, $u \geq 0$, es defineix una MV-àlgebra $\mathbf{\Gamma}(\mathcal{G}, u) := \langle\{a \in G : 0 \leq a \leq u\}, *, \to, \wedge, \vee, 0, u\rangle$ amb les operacions següents:

   $a * b := 0 \vee (a + b - u)$ i

   $a \to b := u \wedge (u - a + b)$.

4. Donat un grup abelià totalment ordenat $\mathcal{G} = \langle G, \wedge, \vee, +, -, 0\rangle$, un element $u \in G$, $u \geq 0$, i un natural $n \geq 1$ es defineix una MV-àlgebra $\text{Ł}_n^{\mathcal{G},u} := \langle\{\langle\frac{r}{n-1}, g\rangle \in Q_{n-1} \otimes G : \langle 0, 0\rangle \leq \langle\frac{r}{n-1}, g\rangle \leq \langle 1, u\rangle\}, *, \to, \wedge, \vee, \langle 0, 0\rangle, \langle 1, u\rangle\rangle$, on $Q_{n-1} \otimes G$ és el producte lexicogràfic del conjunt dels racionals amb denominador $n - 1$ per $\mathcal{G}$, i les operacions són les següents:

   $\langle a_1, a_2\rangle * \langle b_1, b_2\rangle := \max\{\langle 0, 0\rangle, \langle a_1 + b_1 - 1, a_2 + b_2 - u\rangle\}$ i

   $\langle a_1, a_2\rangle \to \langle b_1, b_2\rangle := \min\{\langle 1, u\rangle, \langle 1 - a_1 + b_1, u - a_2 + b_2\rangle\}$.

Escriurem les següents abrevacions:

$Ł_n^\omega := Ł_n^{\mathbf{Z},0}$ i

$Ł_n^k := Ł_n^{\mathbf{Z},k}$.

Val la pena remarcar que $Ł_2^\omega$ és equivalent a la MV-àlgebra $\mathcal{C}$ que defineix Chang a [6] (pàgina 474) i que anomenarem *àlgebra de Chang.*

3.1 El functor $\mathbf{\Gamma}$ de Mundici

En els exemples presentats més amunt hem vist com a partir d'un grup abelià reticulat $\mathcal{G}$ i un element del grup $u \geq 0$, es defineix una MV-àlgebra $\mathbf{\Gamma}(\mathcal{G}, u)$. Chang introduí aquesta transformació a [6] per a mostrar l'equivalència entre MV-cadenes i grups abelians totalment ordenats. Mundici a [39] estengué la construcció obtenint una equivalència categorial entre la categoria dels grups abelians reticulats amb unitat forta i la categoria de les MV-àlgebres.

Definició 22. *Sigui $\mathcal{G}$ un grup abelià reticulat. Es diu que un element $u \in G$ tal que $u \geq 0$ és una unitat forta si, i només si, per tot $g \in G$ existeix un natural $n \geq 1$ tal que $g \leq nu$. En aquest cas, diem que el parell $\langle \mathcal{G}, u \rangle$ és un grup abelià reticulat amb unitat forta.*

Definició 23. *Donats dos grups abelians reticulats amb unitat forta $\langle \mathcal{G}, u \rangle$ i $\langle \mathcal{G}', u' \rangle$ direm que una aplicació h de G a G' és un homomorfisme de grups abelians reticulats amb unitat forta de $\langle \mathcal{G}, u \rangle$ a $\langle \mathcal{G}', u' \rangle$ (i escriurem $h : \langle \mathcal{G}, u \rangle \to \langle \mathcal{G}', u' \rangle$) si, i només si, h és un homomorfisme de grups abelians reticulats de $\mathcal{G}$ a $\mathcal{G}'$ tal que $h(u) = u'$.*

Així, el functor $\mathbf{\Gamma}$ de Mundici es defineix com un functor entre la categoria dels grups abelians reticulats amb unitat forta i la categoria de les MV-àlgebres de la següent manera:

1. Donat un objecte de la primera categoria, o sia, un grup abelià amb unitat forta $\langle \mathcal{G}, u \rangle$, el functor l'envia a la MV-àlgebra $\mathbf{\Gamma}(\mathcal{G}, u)$.

2. Donat un morfisme de la primera categoria, és a dir, un homomorfisme de grups abelians amb unitat forta $h : \langle \mathcal{G}, u \rangle \to \langle \mathcal{G}', u' \rangle$, el functor l'envia a l'homomorfisme de MV-àlgebres $\mathbf{\Gamma}(h) : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ tal que per tot $g \in G$ tal que $0 \leq g \leq u$, $\mathbf{\Gamma}(h)(g) = h(g)$.

Teorema 24 ([39]). *El functor $\mathbf{\Gamma}$ és una equivalència categorial entre la categoria dels grups abelians amb unitat forta i la categoria de les MV-àlgebres.*

Corol·lari 25. *Per tota MV-àlgebra $\mathcal{A}$ hi ha un únic (llevat d'isomorfisme) grup abelià amb unitat forta $\langle \mathcal{G}, u \rangle$ tal que $\mathcal{A} \cong \mathbf{\Gamma}(\mathcal{G}, u)$.*

Per exemple, tenim:

- $[0,1]_L \cong \mathbf{\Gamma}(\mathbf{R}, 1)$, on $\mathbf{R}$ és el grup additiu dels reals.
- $([0,1] \cap Q)_L \cong \mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q}, 1)$, on $\mathbf{Q}$ és el grup additiu dels racionals.
- $Ł_n \cong \mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q}_{n-1}, 1)$ on $\mathbf{Q}_{n-1}$ és el grup additiu dels racionals amb denominador $n-1$.
- $Ł_n^{\mathcal{G},u} \cong \mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q}_{n-1} \otimes \mathcal{G}, \langle 1, u \rangle)$.

3.2 Varietats de MV-àlgebres

En aquest apartat resumirem la classificació de les varietats de MV-àlgebres que es dedueix del treball de Komori [34]. Del teorema de representació en producte subdirecte de cadenes, que Chang ja va demostrar per a les MV-àlgebres, se segueix que tota varietat és generada per la classe de les cadenes que conté. Per tant, la classificació de les varietats resulta de l'estudi de les MV-cadenes que tot seguit resumirem. Per a intentar ser fidels a la terminologia amb què es va fer tal estudi, mantindrem el llenguatge de sumes i ideals, que resulta ser totalment dual al llenguatge de productes i filtres introduït per a les IMTL-àlgebres en la segona secció d'aquest treball.

Definició 26. *Donada una MV-àlgebra $\mathcal{A}$ s'hi defineix per qualssevol $a, b \in A$ $a \oplus b := \neg(\neg a * \neg b)$, $1a := a$ i per tot $n > 1$ $na := (n-1)a \oplus a$.*

Definició 27. *Sigui $\mathcal{A}$ una MV-àlgebra. Un subconjunt $I \subseteq A$ és un ideal si, i només si:*

- $0 \in I$,
- *Si $a \in I$ i $a \geq b$, llavors $b \in I$, i*
- *Si $a, b \in F$, llavors $a \oplus b \in F$.*

I és un ideal propi si, i només si, $1 \notin I$.

De la mateixa manera que en el cas dels filtres, es pot demostrar que tot ideal propi està inclòs en un ideal maximal. Es defineix el co-radical de $\mathcal{A}$ com $CoRad(\mathcal{A}) := \bigcap\{M : M$ és ideal maximal d'$\mathcal{A}\}$.

Així, la noció d'ideal és totalment dual a la noció de filtre i, per tant, també es té la correspondència bijectiva entre ideals i congruències i té sentit considerar el quocient d'una MV-àlgebra per un ideal. És clar també que una MV-cadena $\mathcal{A}$ és simple si, i només si, $CoRad(\mathcal{A}) = \{0\}$.

Definició 28. *Sigui $\mathcal{A}$ una MV-àlgebra i $a \in A$. Es defineix l'ordre de a com:*

$$ord(a) = \begin{cases} min\{n : na = 1\} & \text{si existeix,} \\ \infty & \text{altrament.} \end{cases}$$

Definició 29. *Donada una MV-cadena $\mathcal{A}$, es defineix el seu ordre com*

$$ord(\mathcal{A}) = \sup\{ord(a) + 1 : a \in A, ord(a) < \infty\}.$$

Observem que l'ordre d'una cadena $\mathcal{A}$ és n si, i només si, $\mathcal{A} \cong \text{Ł}_n$.

Definició 30. *Sigui $\mathcal{A}$ una MV-cadena. Definim el seu rang com:*

$$rank(\mathcal{A}) = ord(\mathcal{A}/CoRad(\mathcal{A})).$$

De fet, en aquesta definició de rang, com que $\mathcal{A}$ és una cadena, $CoRad(\mathcal{A})$ és l'únic ideal maximal i, per tant, $\mathcal{A}/CoRad(\mathcal{A})$ és una àlgebra simple. Les àlgebres simples admeten la següent caracterització:

Teorema 31 ([7]). *Sigui $\mathcal{A}$ una MV-àlgebra. Són equivalents:*

1. *$\mathcal{A}$ és simple.*
2. *$\mathcal{A}$ és isomorfa a una subàlgebra de $[0, 1]_L$.*

Corol·lari 32. *Tota MV-àlgebra simple finita és isomorfa a Ł_n per algun $n \geq 1$.*

Corol·lari 33. *Per tota MV-cadena $\mathcal{A}$ tenim que:*

1. *$rank(\mathcal{A}) = n$ si, i només si, $\mathcal{A}/CoRad(\mathcal{A}) \cong \text{Ł}_n$.*
2. *$rank(\mathcal{A}) = \infty$ si, i només si, $\mathcal{A}/CoRad(\mathcal{A})$ és isomorfa a una subàlgebra infinita de $[0, 1]_L$.*

Per exemple, per tot $n \geq 1$ $rank(\text{Ł}_n^\omega) = n$, ja que $\text{Ł}_n^\omega/CoRad(\text{Ł}_n^\omega) \cong \text{Ł}_n$.

Vegem algunes propietats més de les MV-cadenes finites:

Proposició 34. *$Ł_n \subseteq Ł_m$ si, i només si, $n-1$ divideix $m-1$.*

Teorema 35 ([42]). *Una MV-àlgebra $\mathcal{A}$ és finita si, i només si, és isomorfa a un producte directe finit de MV-àlgebres simples finites, això és, si existeixen $k, n_1, \ldots n_k \geq 1$ tals que:*

$$\mathcal{A} \cong Ł_{n_1} \times \ldots \times Ł_{n_k}$$

A més, aquesta representació és única llevat de l'ordre dels factors.

Les àlgebres estàndard sobre els reals i els racionals són suficients per generar tota la varietat de les MV-àlgebres:

Teorema 36 ([7]). $\mathbb{MV} = \mathbb{V}([0,1]_L) = \mathbb{V}(([0,1] \cap Q)_L)$.

I en general:

Teorema 37 ([10]). *Si $\mathcal{A}$ és una subàlgebra infinita de $[0,1]_L$, aleshores $\mathbb{V}(\mathcal{A}) = \mathbb{MV}$.*

També el conjunt de totes les cadenes finites genera tota la varietat. De fet, de [36] es dedueix:

Teorema 38. *Si $\{L_n : n \in I\}$ és un conjunt infinit de MV-cadenes simples finites, llavors $\mathbb{V}(\{L_n : n \in I\}) = \mathbb{MV}$.*

Corol·lari 39 ([34]). *Una varietat de MV-àlgebres és una subvarietat pròpia de $\mathbb{MV}$ si, i només si, conté un nombre finit de $Ł_n$'s.*

Lema 40. *Sigui $\mathbb{K}$ una varietat de MV-àlgebres. Llavors:*

1. *$\mathbb{K}$ és una subvarietat pròpia si, i només si, totes les seves cadenes són de rang finit.*
2. *Si $\mathcal{A} \in \mathbb{K}$ és una cadena i $\mathbb{K} \neq \mathbb{MV}$, aleshores $rank(\mathcal{A}) = n$ per algun $n \geq 1$ tal que $Ł_n \in \mathbb{K}$.*

Lema 41. *Si $\mathcal{A}$ és una MV-cadena amb $rank(\mathcal{A}) = n$, llavors $\mathcal{A} \in \mathbb{V}(Ł_n^\omega)$.*

Teorema 42. *Sigui $\mathcal{A}$ una MV-cadena no simple. Si $rank(\mathcal{A}) = n$, aleshores $Ł_n^\omega \in \mathbb{V}(\mathcal{A})$.*

Així, s'obtenen totes les varietats generades una sola cadena de rang finit, que queden determinades pel seu ordre i el seu rang:

Corol·lari 43. *Si $\mathcal{A}$ és una MV-cadena de rang n, aleshores $\mathbb{V}(\mathcal{A}) = \mathbb{V}(Ł_n^\omega)$ o $\mathbb{V}(\mathcal{A}) = \mathbb{V}(Ł_n)$.*

Utilitzant tots aquests resultats s'arriba finalment a la classificació de les varietats de MV-àlgebres. Tot seguit l'enunciem i n'esbossem també la demostració per tal de mostrar com depèn dels resultats anteriors.

Teorema 44 ([34]). *Sigui* $\mathbb{K}$ *una varietat de MV-àlgebres.* $\mathbb{K} \neq \mathbb{MV}$ *si, i només si, existeixen dos conjunts de nombres naturals* I *i* J *finits i disjunts tals que*

$$\mathbb{K} = \mathbb{V}(\{Ł_i : i \in I\} \cup \{Ł_j^\omega : j \in J\}).$$

Prova: Suposem que $\mathbb{K} = \mathbb{V}(\{Ł_i : i \in I\} \cup \{Ł_j^\omega : j \in J\})$ i vegem que és una subvarietat pròpia. Per veure-ho cal exhibir alguna equació que sigui vàlida a $\mathbb{K}$ però no ho sigui a $\mathbb{MV}$. Prenguem $m := \max(I \cup J)$. Sigui $k > m$ un nombre natural qualsevol més gran que m i considerem l'equació:

$$mx \vee (\neg x \oplus \neg(kx)) \approx 1$$

Aleshores: $\mathbb{K} \models mx \vee (\neg x \oplus \neg(kx)) \approx 1$.

En efecte, si $\mathcal{A} \in \{Ł_i : i \in I\} \cup \{Ł_j^\omega : j \in J\}$, aleshores $rank(\mathcal{A}) \leq m$. Per tant, si $a \notin CoRad(\mathcal{A})$, llavors $ma = 1$; i si $a \in CoRad(\mathcal{A})$, llavors $\neg a \oplus \neg(ka) = 1$.

En canvi: $\mathbb{MV} \not\models mx \vee (\neg x \oplus \neg(kx)) \approx 1$.

En efecte, $Ł_{k+1} \not\models mx \vee (\neg x \oplus \neg(kx)) \approx 1$, ja que l'element $\frac{1}{k}$ falseja l'equació.

Sigui ara $\mathbb{K}$ una subvarietat pròpia de $\mathbb{MV}$ qualsevol. Cal veure que és de la forma descrita pel teorema. Sabem que $\mathbb{K}$ està generada per la classe de les seves cadenes; diguem-ne $\mathbb{C}_K$. Pel corol·lari 39 sabem que $I := \{i \geq 1 : Ł_i \in \mathbb{K}\}$ és finit. A més $I \neq \emptyset$, ja que $Ł_1$ és l'àlgebra trivial. Pel lema 40, si $\mathcal{A} \in \mathbb{C}_K$, llavors existeix un $i \in I$ tal que $rank(\mathcal{A}) = i$.

Sigui $J := \{j \in I : \exists \mathcal{A} \in \mathbb{C}_K$ tal que $rank(\mathcal{A}) = j$ i $CoRad(\mathcal{A}) \neq \{0\}\}$. Pel teorema 42 sabem que $\{Ł_j^\omega : j \in J\} \subseteq \mathbb{K}$. Per tant: $\mathbb{V}(\{Ł_i : i \in I \setminus J\} \cup \{Ł_j^\omega : j \in J\}) \subseteq \mathbb{K}$. Només manca provar la inclusió contrària; de fet és suficient veure que $\mathbb{C}_K \subseteq \mathbb{V}(\{Ł_i : i \in I \setminus J\} \cup \{Ł_j^\omega : j \in J\})$. Sigui $\mathcal{A} \in \mathbb{C}_K$. Hi ha un $j \in I$ tal que $rank(\mathcal{A}) = j$.

Si $j \in J$, aleshores pel lema 41: $\mathcal{A} \in \mathbb{V}(\{Ł_j^\omega : j \in J\})$.

Si $j \notin J$, llavors $\mathcal{A} \cong Ł_j$ i d'aquí: $\mathcal{A} \in \mathbb{V}(\{Ł_i : i \in I \setminus J\})$.

En ambdós casos s'obté: $\mathcal{A} \in \mathbb{V}(\{Ł_i : i \in I \setminus J\} \cup \{Ł_j^\omega : j \in J\})$, i això finalitza la prova. $\square$

4 Algunes construccions per obtenir IMTL-àlgebres

Intentant investigar l'estructura de les t-normes contínues per l'esquerra, Sándor Jenei ha publicat una sèrie d'articles ([26, 27, 28, 29, 30, 32]) donant mètodes per construir t-normes contínues per l'esquerra que no siguin necessàriament contínues. Alguns d'ells ja els hem exposat al treball [41]; aquí ens dedicarem als mètodes restants, a saber, la rotació inconnexa, la rotació connexa, la rotació-aniquilació inconnexa i la rotació-aniquilació connexa. De fet, el mateix Jenei ja formula aquestes construccions a [27, 30] de forma general tot permetent construir no només t-normes contínues per l'esquerra amb negació associada involutiva, sinó també IMTL-àlgebres en general.

Definició 45 ([15]). *Una àlgebra* $\mathcal{A} = \langle A, *, \rightarrow, \wedge, 1\rangle$ *de tipus* $(2, 2, 2, 0)$ *és semihoop sii:*

- $\langle A, \wedge, 1\rangle$ *és un inf-semireticle amb element màxim.*
- $\langle A, *, 1\rangle$ *és un monoide commutatiu tal que* $*$ *és compatible amb l'ordre d'inf-semireticle.*
- *Per qualssevol* $a, b \in A$, $(a \leq b \Leftrightarrow a \rightarrow b = 1)$.
- *Per qualssevol* $a, b, c \in A$, $a * b \rightarrow c = a \rightarrow (b \rightarrow c)$.

Si a més satisfà l'equació de prelinealitat, és un semihoop bàsic.

Així, ja es pot definir la rotació inconnexa d'un semihoop bàsic:

Definició 46. *Sigui* $\mathcal{A}$ *un semihoop bàsic. Definirem una àlgebra,* $\mathcal{A}^*$*, anomenada rotació inconnexa d'*$\mathcal{A}$*. Sigui* $\langle A' = \{a' : a \in A\}, \leq\rangle$ *una còpia disjunta d'*A *dotada de l'ordre invers i sigui* $A^* := A \cup A'$*. Estenem aquests ordres a un ordre per* A^* *imposant* $a' < b$ *per cada* $a, b \in A$*. Finalment, prenem les següents operacions a* $\mathcal{A}^*$*:*

$1^{\mathcal{A}^*} := 1^{\mathcal{A}}$, $0^{\mathcal{A}^*} := (1^{\mathcal{A}})'$, $\wedge^{\mathcal{A}^*}$ *el mínim respecte de l'ordre,* $\vee^{\mathcal{A}^*}$ *el màxim respecte de l'ordre,*

$$\neg^{\mathcal{A}^*} a := \begin{cases} a' & \text{si} \quad a \in A \\ b & \text{si} \quad a = b' \in A' \end{cases}$$

$$a *^{\mathcal{A}^*} b := \begin{cases} a *^{\mathcal{A}} b & \text{si} \quad a, b \in A^*_+ \\ \neg^{\mathcal{A}^*}(a \rightarrow^{\mathcal{A}} \neg^{\mathcal{A}^*} b) & \text{si} \quad a \in A^*_+, b \in A^*_- \\ \neg^{\mathcal{A}^*}(b \rightarrow^{\mathcal{A}} \neg^{\mathcal{A}^*} a) & \text{si} \quad a \in A^*_-, b \in A^*_+ \\ 0^{\mathcal{A}^*} & \text{si} \quad a, b \in A^*_- \end{cases}$$

$$a \rightarrow^{\mathcal{A}^*} b := \begin{cases} a \rightarrow^{\mathcal{A}} b & \text{si} \quad a, b \in A^*_+ \\ \neg^{\mathcal{A}^*}(a *^{\mathcal{A}} \neg^{\mathcal{A}^*} b) & \text{si} \quad a \in A^*_+, b \in A^*_- \\ 1^{\mathcal{A}^*} & \text{si} \quad a \in A^*_-, b \in A^*_+ \\ \neg^{\mathcal{A}^*} b \rightarrow^{\mathcal{A}} \neg^{\mathcal{A}^*} a & \text{si} \quad a, b \in A^*_- \end{cases}$$

La rotació connexa, en canvi, és una construcció que en lloc de partir d'un semihoop bàsic parteix d'un cert tipus de MTL-àlgebres.

Definició 47. *Sigui $\mathcal{A}$ una MTL-àlgebra que satisfaci una de les següents condicions:*

- *$\mathcal{A}$ no té divisors de zero.*
- *$\exists c \in A$ tal que $\forall a \in A$ divisor de zero, $\neg a = c$.*

Definirem $\mathcal{A}^\star$, la rotació connexa d'$\mathcal{A}$. Ara prenem $\langle A' = \{a' : a \in A, a \neq 0^{\mathcal{A}}\}, \leq \rangle$, una còpia disjunta de $A - \{0^{\mathcal{A}}\}$ amb l'ordre invers, definim $\neg^{\mathcal{A}^\star} 0^{\mathcal{A}} := 0^{\mathcal{A}}$ i la resta d'operacions com en el cas de la rotació inconnexa.

Proposició 48 ([27]). *Les rotacions proporcionen IMTL-àlgebres. Concretament:*

- *Les rotacions inconnexes de semihoops bàsics són IMTL-àlgebres sense punt fix.*
- *Les rotacions connexes de MTL-àlgebres que compleixin una de les dues condicions esmentades són IMTL-àlgebres amb punt fix.*

Acabarem amb els mètodes, també de Jenei, de rotació-aniquilació.

Definició 49. *Sigui $\mathcal{A}$ un semihoop bàsic i $\mathcal{A}_1$ una IMTL-àlgebra tals que $A \cap A_1 = \emptyset$. Definim una àlgebra $\mathcal{C}$ anomenada la rotació-aniquilació inconnexa d'$\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}_1$. Sigui $\langle A' = \{a' : a \in A\}, \leq \rangle$ una còpia disjunta d'A (i disjunta també d'A_1) dotada de l'ordre invers i sigui $C := A \cup A' \cup A_1$. Estenem aquests ordres a un ordre per C imposant $a' < b$ i $b < c$ per cada $a, c \in A$ i cada $b \in A_1$. Siguin $C^+ := A$, $C^0 := A_1$ i $C^- := A'$. Finalment, prenem les següents operacions a $\mathcal{C}$:*

$1^{\mathcal{C}} := 1^{\mathcal{A}}$, $0^{\mathcal{C}} := (1^{\mathcal{A}})'$, *$\wedge^{\mathcal{C}}$ el mínim respecte de l'ordre, $\vee^{\mathcal{C}}$ el màxim respecte de l'ordre,*

$$\neg^{\mathcal{C}} a := \begin{cases} a' & \text{si} \quad a \in A \\ b & \text{si} \quad a = b' \in A' \\ \neg^{\mathcal{A}_1} a & \text{si} \quad a \in A_1 \end{cases}$$

$$a *^{\mathcal{C}} b := \begin{cases} a *^{\mathcal{A}} b & \text{si} \quad a, b \in C^+ \\ \neg^{\mathcal{C}}(a \to^{\mathcal{A}} \neg^{\mathcal{C}} b) & \text{si} \quad a \in C^+, b \in C^- \\ \neg^{\mathcal{C}}(b \to^{\mathcal{A}} \neg^{\mathcal{C}} a) & \text{si} \quad a \in C^-, b \in C^+ \\ 0^{\mathcal{C}} & \text{si} \quad a, b \in C^- \\ 0^{\mathcal{C}} & \text{si} \quad a, b \in C^0 \text{ i } a \leq \neg^{\mathcal{C}} b \\ a *^{\mathcal{A}_1} b & \text{si} \quad a, b \in C^0 \text{ i } a \not\leq \neg^{\mathcal{C}} b \\ b & \text{si} \quad a \in C^+, b \in C^0 \\ a & \text{si} \quad a \in C^0, b \in C^+ \\ 0^{\mathcal{C}} & \text{si} \quad a \in C^-, b \in C^0 \\ 0^{\mathcal{C}} & \text{si} \quad a \in C^0, b \in C^- \end{cases}$$

$$a \to^{\mathcal{C}} b := \begin{cases} a \to^{\mathcal{A}} b & \text{si} \quad a, b \in C^+ \\ \neg^{\mathcal{C}}(a *^{\mathcal{A}} \neg^{\mathcal{C}} b) & \text{si} \quad a \in C^+, b \in C^- \\ 1^{\mathcal{C}} & \text{si} \quad a \in C^-, b \in C^+ \\ \neg^{\mathcal{C}} b \to^{\mathcal{A}} \neg^{\mathcal{C}} a & \text{si} \quad a, b \in C^- \\ a \to^{\mathcal{A}_1} b & \text{si} \quad a, b \in C^0 \text{ i } a \not\leq \neg^{\mathcal{C}} b \\ 1^{\mathcal{C}} & \text{si} \quad a, b \in C^0 \text{ i } a \leq \neg^{\mathcal{C}} b \\ b & \text{si} \quad a \in C^+, b \in C^0 \\ 1^{\mathcal{C}} & \text{si} \quad a \in C^0, b \in C^+ \\ 1^{\mathcal{C}} & \text{si} \quad a \in C^-, b \in C^0 \\ \neg^{\mathcal{C}} a & \text{si} \quad a \in C^0, b \in C^- \end{cases}$$

Definició 50. *Sigui $\mathcal{A}$ una MTL-àlgebra i $\mathcal{A}_1$ una IMTL-àlgebra. Definim una àlgebra $\mathcal{C}$ anomenada la rotació-aniquilació connexa d'$\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}_1$. Sigui $\langle A' = \{a' : a \in A\}, \leq \rangle$ una còpia disjunta d'A (i disjunta també d'A_1) dotada de l'ordre invers i sigui $C := A \cup A' \cup A_1 \setminus \{0^{\mathcal{A}_1}, 1^{\mathcal{A}_1}\}$. Estenem aquests ordres a un ordre per C imposant $a' < b$ i $b < c$ per cada $a, c \in A$ i cada $b \in A_1$. Siguin $C^+ := A$, $C^0 := A_1 \setminus \{0^{\mathcal{A}_1}, 1^{\mathcal{A}_1}\}$ i $C^- := A'$. Finalment, les operacions a $\mathcal{C}$ de la mateixa manera que en el cas de la rotació-aniquilació inconnexa.*

Observació 1. *Recordem l'operació de suma ordinal de MTL-cadenes que hem presentat al treball [41]. Aquesta operació es pot estendre sense problemes per permetre que els sumands puguin ser també semihoops bàsics. Notem que tant la rotació-aniquilació connexa com la inconnexa corresponen en realitat a una suma ordinal de certs semihoops i IMTL-àlgebres a la qual les operacions són convenientment modificades per tal que l'àlgebra resultant compleixi la llei d'involució. A més els conjunts $A \cup A'$ i $(A_1 \cup \{1^{\mathcal{A}}\}) \setminus \{0^{\mathcal{A}_1}, 1^{\mathcal{A}_1}\}$ són subuniversos d'aquestes sumes ordinals.*

Proposició 51 ([27]). *Les rotacions-aniquilacions són IMTL-àlgebres.*

5 IMTL-àlgebres perfectes i bipartides i rotacions de semihoops bàsics

En aquesta secció presentarem ja alguns resultats originals (que es poden trobar també a [40]). El nostre objectiu és ara estudiar les IMTL-àlgebres que s'obtenen mitjançant els mètodes de rotació anteriorment descrits. A tal efecte estendrem a la varietat $\mathbb{IMTL}$ certes nocions usades en la teoria de MV-àlgebres, a saber les d'àlgebra perfecta, bipartida, local i localment finita (vegeu [2, 3, 12]). Val a dir que aquestes nocions per a MV-àlgebres es definien en termes d'ideals i nosaltres aquí les traduirem al llenguatge de filtres, més convenient i generalitzable al marc dels reticles residuats.

En primer lloc definirem el concepte d'ordre d'un element en una IMTL-àlgebra.

Definició 52. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra i $a \in A$. Definim l'ordre d'a com:*

$$ord(a) = \begin{cases} min\{n : a^n = 0\} & \text{si existeix} \\ \infty & \text{altrament} \end{cases}$$

Observem que:

- $ord(1) = \infty$.
- Si F és un filtre propi i $a \in F$, llavors $ord(a) = \infty$.
- Si $a \in A_-$, llavors $ord(a) < \infty$.

Aquesta definició ens porta a la d'àlgebra perfecta:

Definició 53. *Una IMTL-àlgebra $\mathcal{A}$ és perfecta si, i només si, $\forall a \in A \quad (ord(a) < \infty$ sii $ord(\neg a) = \infty)$.*

Alguns exemples d'IMTL-àlgebres perfectes són l'àlgebra de Boole de dos elements $\mathcal{B}_2$, la MV-àlgebra de Chang definida a [6] i totes les NM-cadenes sense punt fix; en totes elles es comprova fàcilment que tots els elements positius són d'ordre infinit.

Per a definir el concepte d'IMTL-àlgebra bipartida necessitem una proposició prèvia.

Proposició 54. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra i $F \subseteq A$ un filtre. Aleshores el subunivers d'A generat per F és $F \cup \neg F$, on $\neg F = \{\neg a : a \in F\}$.*

Prova: Sigui X el subunivers d'A generat per F. Hem de veure que $X = F \cup \neg F$. La inclusió de dreta a esquerra és òbvia, per tant només hem de provar l'altra. Observem que $F \subseteq F \cup \neg F$, o sigui que és suficient mostrar que $F \cup \neg F$ és un subunivers. Això es veu fàcilment comprovant que és tancat per totes les operacions. $\square$

Definició 55. *$\mathcal{A}$ és bipartida si, i només si, hi ha un filtre maximal $F \subseteq A$ tal que $A = F \cup \neg F$, és a dir, tal que F genera $\mathcal{A}$.*

A més, definim una classe especial d'IMTL-àlgebres bipartides, $\mathbb{BP}_0$.

Definició 56. *$\mathcal{A} \in \mathbb{BP}_0$ si, i només si, $\forall F \subseteq A$ filtre maximal, $A = F \cup \neg F$, és a dir, és bipartida per tots els filtres maximals.*

Tots els exemples que hem donat abans d'àlgebres perfectes són també àlgebres de $\mathbb{BP}_0$. Però no totes les àlgebres de $\mathbb{BP}_0$ són perfectes, per exemple l'àlgebra de Boole de quatre elements: $\mathcal{B}_4 \in \mathbb{BP}_0$ però no és perfecta. Tampoc és cert que totes les àlgebres bipartides siguin de $\mathbb{BP}_0$: $Ł_3 \times \mathcal{B}_2$ és bipartida i no és a $\mathbb{BP}_0$.

Notem que ni les àlgebres perfectes ni les bipartides no poden tenir punt fix.

Totes aquestes nocions resulten ser equivalents per a les cadenes. De fet, tenim:

Teorema 57. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-cadena. Són equivalents:*

(1) *$\mathcal{A}$ és bipartida.*

(2) *$\mathcal{A} \in \mathbb{BP}_0$.*

(3) *$A = Rad(\mathcal{A}) \cup \neg Rad(\mathcal{A})$.*

(4) *$Rad(\mathcal{A}) = A_+$ i $\mathcal{A}$ no té punt fix.*

(5) *$\mathcal{A}$ és perfecta.*

(6) *$\mathcal{A}$ és isomorfa a la rotació inconnnexa d'un semihoop bàsic totalment ordenat.*

(7) *$\mathcal{A} \models BP(x) \approx 1$.*

(8) *$\mathcal{A}/Rad(\mathcal{A}) \cong \mathcal{B}_2$.*

on $BP(x) = (\neg(\neg x)^2)^2 \leftrightarrow \neg(\neg x^2)^2$.

Prova: (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (4) i (4) $\Rightarrow$ (5) són directes.

(5) $\Rightarrow$ (6): Si la cadena és perfecta, llavors tots els elements positius tenen ordre infinit; per tant A_+ és tancat per producte. En conseqüència, si $\mathcal{B}$ és el semihoop bàsic donat per A_+, llavors $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}^*$.

(6) $\Rightarrow$ (7): Suposem que hi ha un semihoop bàsic totalment ordenat $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}^*$. Un senzill càlcul ens mostra que per tot $a \in A_+$ $(\neg(\neg a)^2)^2 = \neg(\neg a^2)^2 = 1$ i per tot $a \in A_-$ $(\neg(\neg a)^2)^2 = \neg(\neg a^2)^2 = 0$.

(7) $\Rightarrow$ (8): Suposem que $\mathcal{A}$ satisfà l'equació. Notem que en aquest cas el conjunt dels positius és un filtre propi. En efecte, si $a \in A_+$, llavors $\neg a \in A_-$, i per tant $(\neg a)^2 = 0$. En conseqüència $(\neg(\neg a)^2)^2 = 1 = \neg(\neg a^2)^2$ i això implica $a^2 \in A_+$. Ara prenem $a, b \in A_+$ tals que $a \leq b$. Llavors $a^2 \leq a * b$ i $a^2 \in A_+$, i per tant $a * b \in A_+$. Així, $A_+ = \mathit{Rad}(\mathcal{A})$. Considerem l'àlgebra $\mathcal{A}/\mathit{Rad}(\mathcal{A})$ i prenem $a \in A$. Si a és positiu, llavors $a \to 1 = 1 \in \mathit{Rad}(\mathcal{A})$ i $1 \to a = a \in \mathit{Rad}(\mathcal{A})$, i d'aquí $a/\mathit{Rad}(\mathcal{A}) = 1/\mathit{Rad}(\mathcal{A})$. En canvi, si a és negatiu, llavors $a \to 0 = \neg a \in \mathit{Rad}(\mathcal{A})$ i $0 \to a = 1 \in \mathit{Rad}(\mathcal{A})$, so $a/\mathit{Rad}(\mathcal{A}) = 0/\mathit{Rad}(\mathcal{A})$. En conseqüència, $\mathcal{A}/\mathit{Rad}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{B}_2$.

(8) $\Rightarrow$ (1): Suposem que el quocient pel radical és l'àlgebra de Boole de dos elements. És suficient provar que per tot $a \in A$ ($a \in \mathit{Rad}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \neg a \notin \mathit{Rad}(\mathcal{A})$). En efecte: a pertany al radical sii $a/\mathit{Rad}(\mathcal{A}) = 1/\mathit{Rad}(\mathcal{A})$ sii $\neg a/\mathit{Rad}(\mathcal{A}) = 0/\mathit{Rad}(\mathcal{A})$ sii $\neg a \notin \mathit{Rad}(\mathcal{A})$.

□

5.1 El radical de les IMTL-àlgebres

Ens proposem ara estendre a $\mathbb{IMTL}$ la caracterització del radical donada a [17] per a àlgebres de Wajsberg.

Lema 58. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-cadena. Aleshores:*
$\mathit{Rad}(\mathcal{A}) = \{a \in A : a^n > \neg a \quad \forall n \geq 1\}$.

Prova: Si $a \in \mathit{Rad}(\mathcal{A})$, llavors per tot $n \geq 1$, $a^n \in \mathit{Rad}(\mathcal{A}) \subseteq A_+$. Com que $a^n \leq a$, obtenim que $\neg a \leq \neg a^n < a^n$. Recíprocament, prenguem $a \in A$ tal que per tot $n \geq 1$ $a^n > \neg a$. Aleshores, en particular, per tot n, $a^n \neq 0$, per tant el filtre generat per a, $\mathbb{F}i(a)$, és propi. Així, $a \in \mathbb{F}i(a) \subseteq \mathit{Rad}(\mathcal{A})$, puix que en les cadenes els filtres estan totalment ordenats. □

Lema 59. *Siguin $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ dues IMTL-àlgebres i $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfisme entre elles.*

(a) Si $F \subseteq B$ és un filtre, llavors $h^{-1}[F]$ és un filtre.

(b) Si $F \subseteq B$ és un filtre propi, llavors $h^{-1}[F]$ és un filtre propi.

(c) Si $F \subseteq B$ és un filtre primer, llavors $h^{-1}[F]$ és un filtre primer.

(d) Si $F \subseteq B$ és un filtre maximal, llavors $h^{-1}[F]$ és un filtre maximal.

(e) Si $F \subseteq B$ és un filtre, llavors $h^{-1}[\neg F] = \neg(h^{-1}[F])$.

Prova: Tot són comprovacions rutinàries. □

Ara ja podem generalitzar la caracterització del radical a totes les IMTL-àlgebres.

Teorema 60. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra. Aleshores:*
$Rad(\mathcal{A}) = \{a \in A : a^n > \neg a \quad \forall n \geq 1\}$.

Prova: Suposem primer que a pertany al conjunt de la dreta. Si existeix un filtre maximal M tal que $a \notin M$, llavors existeix un $n \geq 1$ tal que $\neg a^n \in M$. Però, atès que $a^n > \neg a$, tenim $\neg a^n < a$, i per tant $a \in M$, la qual cosa és absurda. Per tal de provar l'altra inclusió, considerem una representació d'$\mathcal{A}$ com a producte subdirecte d'IMTL-cadenes, $\varphi : \mathcal{A} \hookrightarrow \Pi_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Sigui $\varphi_i := \pi_i \circ \varphi$. Pel lema anterior, per tot $i \in I$, $\varphi_i^{-1}[Rad(\mathcal{A}_i)]$ és un filtre maximal d'$\mathcal{A}$, per tant:

$$Rad(\mathcal{A}) \subseteq \bigcap_{i \in I} \varphi_i^{-1}[Rad(\mathcal{A}_i)].$$

Així, només hem de demostrar aquesta inclusió:

$$\bigcap_{i \in I} \varphi_i^{-1}[Rad(\mathcal{A}_i)] \subseteq \{a \in A : a^n > \neg a \quad \forall n \geq 1\}$$

Suposem que per tot $i \in I$ $a \in \varphi_i^{-1}[Rad(\mathcal{A}_i)]$; llavors per tot $i \in I$, $\varphi(a)(i) \in Rad(\mathcal{A}_i)$ i, com que $\mathcal{A}_i$ són cadenes, $\forall n \geq 1$ $(\varphi(a)(i))^n > \neg(\varphi(a)(i))$. En conseqüència, $\forall n \geq 1$, $\varphi(a)^n > \neg\varphi(a)$ i d'aquí $\forall n \geq 1$, $a^n \geq \neg a$. Això implica que $\forall n \geq 1$, $a^n > \neg a$. □

Corol·lari 61. *Per tota $\mathcal{A}$ IMTL-àlgebra, $Rad(\mathcal{A}) \subseteq A_+$.*

Corol·lari 62. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra. Aleshores:*
A_+ és un filtre sii $A_+ = Rad(\mathcal{A})$.

Prova: Suposem que A_+ és a filtre. Hem de veure que $A_+ \subseteq Rad(\mathcal{A})$. Sigui $a \in A_+$; llavors per tot $n \geq 1$, $a^n \in A_+$. Tenim $a^n \leq a$; per tant $\neg a \leq \neg a^n < a^n \leq a$ i això significa que $a \in Rad(\mathcal{A})$. □

5.2 IMTL-àlgebres locals

Fixem-nos que en tota IMTL-àlgebra $\mathcal{A}$ es té: $Rad(\mathcal{A}) \subseteq \{a \in A : ord(a) = \infty\}$. Ara estudiarem aquelles àlgebres en què aquesta inclusió és una igualtat, les IMTL-àlgebres locals.

Definició 63. *Una IMTL-àlgebra $\mathcal{A}$ és local si, i només si, per tot $a \in A$ $ord(a) < \infty$ o $ord(\neg a) < \infty$.*

És clar que totes les cadenes són locals. També totes les àlgebres perfectes ho són. De fet, podem provar la següent caracterització:

Proposició 64. *Una IMTL-àlgebra $\mathcal{A}$ és local sii té un únic filtre maximal.*

Prova: Suposem que M és l'únic filtre maximal d'$\mathcal{A}$. Si hi ha un $a \in A$ tal que $ord(a) = ord(\neg a) = \infty$, llavors $a, \neg a \in M$ i això és una contradicció, ja que M és propi. Recíprocament, suposem que $\mathcal{A}$ és local i sigui M un filtre maximal. Aleshores és fàcil veure que $M = \{a \in A : ord(a) = \infty\}$. Clarament M està contingut en aquest conjunt. Si $a \notin M$ i $ord(a) = \infty$, llavors $\exists n$ tal que $\neg a^n \in M$, i per tant $ord(\neg a^n) = \infty$. Llavors $ord(a^n) < \infty$, i d'aquí $ord(a) < \infty$, una contradicció. □

Corol·lari 65. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra.*
$\mathcal{A}$ és local si, i només si, $Rad(\mathcal{A}) = \{a \in A : ord(a) = \infty\}$.

Hi ha una noció especial de filtre relacionada amb les àlgebres locals, a saber els filtres primaris. Per tal de definir-los necessitarem introduir una nova operació, la suma, a les IMTL-àlgebres.

Definició 66. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra. Per qualssevol $a, b \in A$ definim $a \oplus b := \neg(\neg a * \neg b)$, $1a := a$ i per tot $n > 1$ $na := (n-1)a \oplus a$.*

Definició 67. *P és un filtre primari d'una IMTL-àlgebra $\mathcal{A}$ sii és un filtre propi tal que per qualssevol $a, b \in A$ tals que $a \oplus b \in P$ existeix un n tal que $na \in P$ o $nb \in P$.*

Teorema 68. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra i $P \subseteq A$ un filtre. Aleshores:*
$\mathcal{A}/P$ és local si, i només si, P és primari.

Prova: Suposem que el quocient és local i prenguem $a \oplus b \in P$ tal que per tot $n \geq 1$ $na \notin P$. D'una banda, $a/P \oplus b/P = (a \oplus b)/P = 1/P$, i per tant $\neg(b/P) \leq a/P$. D'altra banda, per tot $n \geq 1$ $n(a/P) \neq 1/P$, i així per tot $n \geq 1$, $n\neg(b/P) \neq 1/P$. Se segueix que $ord(b/P) = \infty$ i, com que $\mathcal{A}/P$ és local, $ord(\neg(b/P)) < \infty$. Això implica que hi ha un $m \geq 1$ tal que $mb/P = 1/P$ i, per tant, $mb \in P$. Per a provar l'altra direcció, prenguem un a/P arbitrari i observem que $a \oplus \neg a = 1 \in P$. Aleshores, per ésser P primari, sabem que hi ha n tal que $na \in P$ o $n(\neg a) \in P$. En el primer cas és fàcil veure que $ord(\neg a/P) < \infty$ i el segon implica que $ord(a/P) < \infty$. Per tant, l'àlgebra és local. □

Corol·lari 69. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra i sigui $F \subseteq A$ un filtre primer. Aleshores, F és primari.*

Proposició 70. *Sigui F un filtre propi d'una IMTL-àlgebra. Aleshores:*

F és primari sii hi ha a únic filtre maximal M tal que $F \subseteq M$.

Prova: F és primari sii $\mathcal{A}/F$ és local sii $\mathcal{A}/F$ té un únic filtre maximal sii hi ha un únic filtre maximal M tal que $F \subseteq M$, puix que hi ha un isomorfisme d'ordre entre els filtres d'$\mathcal{A}/F$ i els filtres d'$\mathcal{A}$ que contenen F. □

Corol·lari 71. *Una IMTL-àlgebra és local sii tots els seus filtres propis són primaris.*

Corol·lari 72. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra local. Aleshores per tot filtre $F \subseteq A$, $\mathcal{A}/F$ és local.*

D'aquí deduim que la classe de les IMTL-àlgebres locals és tancada per imatges homomòrfiques. És senzill provar que també és tancada per subàlgebres. Tanmateix, no és ni una varietat ni una quasivarietat ja que no ho és per productes directes. Per exemple, la NM-àlgebra estàndard $[0,1]_{NM}$ és local, mentre que $[0,1]^2_{NM}$ no ho és.

Amb el propòsit d'enunciar una classificació de les àlgebres locals , definirem dos nous tipus d'IMTL-àlgebres.

Definició 73. *Una IMTL-àlgebra $\mathcal{A}$ és localment finita*[6] *sii per tot $a \in A\backslash\{1\}$ $ord(a) < \infty$. $\mathcal{A}$ és peculiar sii és local i existeixen $a, b \in A \setminus \{0,1\}$ tals que $ord(a) = \infty$, $ord(b) < \infty$ i $ord(\neg b) < \infty$.*

Les àlgebres localment finites i les peculiars sí que poden tenir punt fix; per exemple la MV-àlgebra estàndard és localment finita i $[0,1]_{NM}$ és peculiar, ja que $ord(\frac{1}{2}) = ord(\neg\frac{1}{2}) < \infty$.

Teorema 74. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra local tal que $\mathcal{A} \ncong \mathcal{B}_2$. Aleshores $\mathcal{A}$ satisfà una, i només una, de les següents:*

- *$\mathcal{A}$ és perfecta.*
- *$\mathcal{A}$ és localment finita.*
- *$\mathcal{A}$ és peculiar.*

[6]Seguim aquí la terminologia introduïda per Chang a [6]. Convé no confondre aquesta definició amb la definició general de l'Àlgebra Universal segons la qual les àlgebres localment finites són aquelles en què tota subàlgebra finitament generada és finita.

5.3 IMTL-àlgebres perfectes i rotacions inconnexes de semihoops bàsics

Per a les àlgebres perfectes també hi ha un tipus especial de filtres:

Definició 75. *P és un filtre perfecte d'una IMTL-àlgebra $\mathcal{A}$ sii és un filtre propi tal que $\forall a \in A\,(\exists n\, na \in P$ sii $\forall m\, m(\neg a) \notin P)$.*

Proposició 76. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra i $F \subseteq A$ un filtre propi. Aleshores: F és perfecte sii $\mathcal{A}/F$ és àlgebra perfecta no-trivial.*

Prova: És una comprovació directa. $\square$

Corol·lari 77. *Tot filtre perfecte és primari.*

Prova: Per l'última proposició i pel teorema 68. $\square$

Teorema 78. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra. Aleshores: $\mathcal{A}$ és perfecta sii tot filtre propi d'$\mathcal{A}$ és perfecte.*

Prova: Si tot filtre propi és perfecte, llavors $\mathcal{A}$ és perfecta car $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\{1\}$. Recíprocament, suposem que l'àlgebra és perfecta i prenguem un filtre propi arbitrari $F \subseteq A$, i $a \in F$. Hem de provar que $(\exists n \quad na \in F \Leftrightarrow \forall m \quad m(\neg a) \notin F)$. En efecte, $na \in F \Rightarrow ord(na) = \infty \Rightarrow ord(\neg(na)) < \infty \Rightarrow ord((\neg a)^n) < \infty \Rightarrow ord(\neg a) < \infty \Rightarrow ord(a) = \infty$. Si hi ha un m tal que $m(\neg a) \in F$, llavors $ord(\neg a) = \infty$ i això és absurd.

Per l'altra implicació: $\forall m \quad m(\neg a) \notin F \Rightarrow \forall m \quad m(\neg a) \neq 1 \Rightarrow \forall m \quad a^m \neq 0 \Rightarrow ord(a) = \infty \Rightarrow ord(\neg a) < \infty \Rightarrow \exists n \quad (\neg a)^n = 0 \Rightarrow \exists n \quad na = 1 \in F$. $\square$

Així doncs, hem vist que la classe de les IMTL-àlgebres perfectes és tancada per imatges homomorfes. Òbviament també és tancada per subàlgebres. Ara bé, el mateix exemple que hem usat per al cas de les àlgebres locals mostra que aquesta classe tampoc és tancada per productes directes.

Aquestes àlgebres es poden caracteritzar de la següent manera:

Teorema 79. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra. Aleshores: $\mathcal{A}$ és perfecta sii $A = Rad(\mathcal{A}) \cup \neg Rad(\mathcal{A})$.*

Prova: Suposem que $\mathcal{A}$ és perfecta. Pel corol·lari 65 sabem $Rad(\mathcal{A}) = \{a \in A : ord(a) = \infty\}$ i llavors el resultat se segueix immediatament. Recíprocament, si $A = Rad(\mathcal{A}) \cup \neg Rad(\mathcal{A})$, llavors tot $a \in Rad(\mathcal{A})$ té ordre infinit mentre que tot $a \in \neg Rad(\mathcal{A})$ té ordre finit. Per tant, l'àlgebra és perfecta. $\square$

Corol·lari 80. *Tota àlgebra perfecta és bipartida.*

Prova: Si l'àlgebra és perfecta, llavors és local, o sia, el radical és l'únic filtre maximal i el resultat esdevé obvi. □

Una altra conseqüència senzilla és la següent proposició sobre subàlgebres perfectes:

Corol·lari 81. *Donada una IMTL-àlgebra $\mathcal{A}$, $Rad(\mathcal{A}) \cup \neg Rad(\mathcal{A})$ és l'univers d'una subàlgebra perfecta que, a més, conté tots els universos de les altres subàlgebres perfectes.*

Arribem ara a la caracterització principal de les àlgebres perfectes, segons la qual aquestes resulten ser les mateixes que aquelles que s'obtenen per rotació inconnexa de semihoops bàsics:

Teorema 82. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra. Són equivalents:*

(1) $\mathcal{A}$ és perfecta.

(2) $\mathcal{A}/Rad(\mathcal{A}) \cong \mathcal{B}_2$.

(3) $\mathcal{A}$ és isomorfa a la rotació inconnexa d'un semihoop bàsic.

Prova:

(1) $\Rightarrow$ (2): Si l'àlgebra és perfecta, llavors el radical és perfecte i maximal, o sia $\mathcal{A}/Rad(\mathcal{A})$ és simple i perfecta, i per tant ha de ser isomorfa a $\mathcal{B}_2$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Per tot $a \in A$, $(a/Rad(\mathcal{A}) = 1/Rad(\mathcal{A}) \Rightarrow a \in Rad(\mathcal{A}))$ i $(a/Rad(\mathcal{A}) = 0/Rad(\mathcal{A}) \Rightarrow a \in \neg Rad(\mathcal{A}))$. Per tant $A = Rad(\mathcal{A}) \cup \neg Rad(\mathcal{A})$. Així si considerem el semihoop bàsic $\mathcal{B}$ donat per $Rad(\mathcal{A})$, obtenim $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}^*$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Si $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}^*$ per algun semihoop bàsic $\mathcal{B}$, llavors és obvi que tots els elements positius tenen ordre infinit i tots els elements negatius tenen ordre finit.

□

No deixa de ser interessant també particularitzar aquest darrer resultat a les MV-àlgebres. A tal efecte, necessitem dues definicions més que es troben a [15].

Definició 83. *Una àlgebra $\mathcal{A} = \langle A, *, \rightarrow, 1\rangle$ és un hoop si, i només si, $*$ és una operació monoidal que té 1 com a element neutre i a més satisfà:*

- $x \rightarrow x \approx 1$.

- $x * (x \to y) \approx y * (y \to x)$.
- $x * y \to z \approx x \to (y \to z)$.

S'hi defineix una relació d'ordre així: $a \leq b \Leftrightarrow a \to b = 1$.

De fet, un hoop és un semihoop bàsic que satisfà $x*(x \to y) \approx y*(y \to x)$.

Definició 84. *Un hoop de Wajsberg és un hoop que safisfà:* $(x \to y) \to y \approx (y \to x) \to x$. *Un hoop cancel·latiu és un hoop de Wajsberg sense element mínim.*

Obtenim que les MV-àlgebres perfectes coincideixen amb les rotacions inconnexes de hoops cancel·latius.

Teorema 85. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra. Són equivalents:*

(1) $\mathcal{A}$ és una MV-àlgebra perfecta.

(2) $\mathcal{A}$ és isomorfa a la rotació inconnexa d'un hoop cancel·latiu.

Prova:

(1) $\Rightarrow$ (2): És clar que $Rad(\mathcal{A})$ és un hoop de Wajsberg. Així serà suficient mostrar que no té element mínim i que, per tant, és un hoop cancel·latiu. Suposem que a és el mínim de $Rad(\mathcal{A})$ i prenguem qualsevol $x < a$ diferent de 0. Aleshores, $a \wedge x = x$, però $a * (a \to x) = a * \neg(a * \neg x) = \neg(a \to a * \neg x) = \neg(a \to a) = 0$, que és contradictori amb el fet que $\mathcal{A}$ és MV-àlgebra.

(2) $\Rightarrow$ (1): La rotació inconnexa d'un hoop cancel·latiu és sempre una MV-àlgebra, tal com es demostra al Lema 3.13 de [15]. Per tant, pel darrer teorema, és una àlgebra perfecta.

□

5.4 Varietats de semihoops bàsics i varietats d'IMTL-àlgebres perfectes

En aquest apartat veurem que la relació que hem establert entre àlgebres perfectes i rotacions inconnexes de semihoops bàsics té com a conseqüència que els seus reticles de subvarietats són isomorfs. Concretament, veurem que donats dues classes de semihoops, la varietat que generen és la mateixa si, i només si, també coincideixen les varietats generades per les classes de les seves rotacions inconnexes.

Necessitarem la següent notació: donada una classe de semihoops bàsics $\mathbb{K}$, definim $\mathbb{K}^* := \{\mathcal{A}^* : \mathcal{A} \in \mathbb{K}\}$.

Lema 86. *Si $\mathbb{K}$ és una classe de semihoops bàsics, llavors $\mathbb{H}(\mathbb{K}^*) = \mathbb{H}(\mathbb{K})^*$.*

Prova: Siguin $\mathcal{A} \in \mathbb{K}$ i $\mathcal{B} \in \mathbb{H}(\mathcal{A})$ i considerem $\mathcal{B}^*$. Així, tenim que $\mathcal{B}$ és la imatge d'un homomorfisme $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ i cal veure que $\mathcal{B}^* \in \mathbb{H}(\mathcal{A}^*)$. Simplement basta considerar el següent homomorfisme exhaustiu:

$g : \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$ definit per:

1. $g(a) = h(a)$, si $a \in (A^*)_+$,
2. $g(a) = \neg h(\neg a)$, si $a \in (A^*)_-$.

Prenguem ara $\mathcal{B} \in \mathbb{H}(\mathbb{K}^*)$, o sia, $\mathcal{B}$ és la imatge d'un homomorfisme $h : \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}$ on $\mathcal{A} \in \mathbb{K}$. Llavors $\mathcal{B} \cong h[(A^*)_+]^*$, i per tant $\mathcal{B} \in \mathbb{H}(\mathcal{A})^* \subseteq \mathbb{H}(\mathbb{K})^*$. □

Lema 87. *Si $\mathbb{K}$ és una classe de semihoops bàsics, llavors $\mathbb{S}(\mathbb{K}^*) = \mathbb{S}(\mathbb{K})^*$.*

Prova: Siguin $\mathcal{A} \in \mathbb{K}$ i $\mathcal{B} \in \mathbb{S}(\mathcal{A}^*)$. Aleshores, com que $\mathcal{B}$ és una subàlgebra de la rotació inconnexa de $\mathcal{A}$, cal que $B_+ \subseteq (A^*)_+ = A$ i $B_- \subseteq (A^*)_-$. De fet, B_+ és l'univers d'una subàlgebra de $\mathcal{A}$ i, per tant, $\mathcal{B}$ és la rotació inconnexa d'aquesta subàlgebra i d'aquí $\mathcal{A} \in \mathbb{S}(\mathbb{K})^*$.

Recíprocament, si $\mathcal{A} \in \mathbb{K}$ i $\mathcal{B} \in \mathbb{S}(\mathcal{A})^*$, llavors $\mathcal{B} = \mathcal{C}^*$ per alguna $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$. D'aquí s'obté $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{A}^*$ i, per tant, $\mathcal{B} \in \mathbb{S}(\mathcal{A}^*) \subseteq \mathbb{S}(\mathbb{K}^*)$. □

Lema 88. *Si $\mathbb{K}$ és una classe de semihoops bàsics, llavors $\mathbb{P}_U(\mathbb{K})^* \subseteq \mathbb{ISP}_U(\mathbb{K}^*)$.*

Prova: Siguin $\{\mathcal{A}_i : i \in I\} \subseteq \mathbb{K}$ i considerem un ultraproducte $\prod_{\mathcal{U}}^I \mathcal{A}_i$. Prenem l'ultraproducte de $\{\mathcal{A}_i^* : i \in I\}$ corresponent al mateix conjunt d'índexos i al mateix ultrafiltre, o sia, $\prod_{\mathcal{U}}^I \mathcal{A}_i^*$. Basta considerar la immersió $\alpha : (\prod_{\mathcal{U}}^I \mathcal{A}_i)^* \to \prod_{\mathcal{U}}^I \mathcal{A}_i^*$ definida per:

- Si $\bar{a}/\mathcal{U} \in (\prod_{\mathcal{U}}^I A_i)^*_+$, $\alpha(\bar{a}/\mathcal{U}) := \bar{a}/\mathcal{U}$.
- Si $\neg(\bar{a}/\mathcal{U}) \in (\prod_{\mathcal{U}}^I A_i)^*_-$, $\alpha(\neg(\bar{a}/\mathcal{U})) := \neg\bar{a}/\mathcal{U}$, on per cada $i \in I$ $(\neg\bar{a})(i) = \neg(\bar{a}(i))$.

Així obtenim que $(\prod_{\mathcal{U}}^I \mathcal{A}_i)^* \in \mathbb{IS}(\prod_{\mathcal{U}}^I \mathcal{A}_i^*) \subseteq \mathbb{ISP}_U(\mathbb{K}^*)$. □

Lema 89. *Si $\mathbb{K}$ és una classe de semihoops bàsics, llavors $\mathbb{P}_U(\mathbb{K}^*) \subseteq \mathbb{IS}(\mathbb{P}_U(\mathbb{K})^*)$.*

Prova: Prenem $\{\mathcal{A}_i : i \in I\} \subseteq \mathbb{K}$ i un ultraproducte $\prod_{\mathcal{U}}^I \mathcal{A}_i^*$. Donat $\bar{a} \in \prod^I A_i^*$, definim $j(\bar{a}) \in \prod^I A_i$ com:

$$j(\bar{a})(i) := \begin{cases} \bar{a}(i) & \text{si } \bar{a}(i) > \neg\bar{a}(i), \\ \neg\bar{a}(i) & \text{altrament.} \end{cases}$$

Per demostrar que $\prod_{\mathcal{U}}^I \mathcal{A}_i^* \in \mathbb{IS}((\prod_{\mathcal{U}}^I \mathcal{A}_i)^*) \subseteq \mathbb{IS}(\mathbb{P}_U(\mathbb{K})^*)$ només cal considerar la immersió $\alpha : \prod_{\mathcal{U}}^I \mathcal{A}_i^* \to (\prod_{\mathcal{U}}^I \mathcal{A}_i)^*$ definida per:

- Si $\bar{a}/\mathcal{U} \in \prod_{\mathcal{U}}^I A_i^*$ és tal que $\{i \in I : \bar{a}(i) > \neg\bar{a}(i)\} \in \mathcal{U}$, llavors $\alpha(\bar{a}/\mathcal{U}) := j(\bar{a})/\mathcal{U}$.
- Si $\bar{a}/\mathcal{U} \in \prod_{\mathcal{U}}^I A_i^*$ és tal que $\{i \in I : \bar{a}(i) < \neg\bar{a}(i)\} \in \mathcal{U}$, llavors $\alpha(\bar{a}/\mathcal{U}) := \neg\alpha(\neg\bar{a}/\mathcal{U})$.

□

Teorema 90. *Siguin $\mathbb{K}$ i $\mathbb{L}$ dues classes de semihoops bàsics totalment ordenats. Llavors, $\mathbb{V}(\mathbb{K}) = \mathbb{V}(\mathbb{L})$ sii $\mathbb{V}(\mathbb{K}^*) = \mathbb{V}(\mathbb{L}^*)$.*

Prova: Del lema de Jónsson (vegeu [5]) es dedueix que donada una classe $\mathbb{M}$ de semihoops bàsics o d'IMTL-àlgebres, $\mathbb{HSP}_U(\mathbb{M})$ coincideix amb la classe de les cadenes de $\mathbb{V}(\mathbb{M})$. Per tant, en virtut del teorema de representació en producte subdirecte de cadenes, només cal provar que $\mathbb{HSP}_U(\mathbb{K}) = \mathbb{HSP}_U(\mathbb{L})$ sii $\mathbb{HSP}_U(\mathbb{K}^*) = \mathbb{HSP}_U(\mathbb{L}^*)$.

Suposem, en primer lloc, que $\mathbb{HSP}_U(\mathbb{K}) = \mathbb{HSP}_U(\mathbb{L})$. Llavors, $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{HSP}_U(\mathbb{L})$ i per tant, $\mathbb{K}^* \subseteq (\mathbb{HSP}_U(\mathbb{L}))^* = \mathbb{HS}(\mathbb{P}_U(\mathbb{L}))^* \subseteq \mathbb{HSISP}_U(\mathbb{L}^*) \subseteq \mathbb{HSP}_U(\mathbb{L}^*)$. Per tant, $\mathbb{HSP}_U(\mathbb{K}^*) \subseteq \mathbb{HSP}_U(\mathbb{L}^*)$, i l'altra inclusió és anàloga.

Suposem ara que $\mathbb{HSP}_U(\mathbb{K}^*) = \mathbb{HSP}_U(\mathbb{L}^*)$. Llavors, $\mathbb{K}^* \subseteq \mathbb{HSP}_U(\mathbb{L}^*) \subseteq \mathbb{HSIS}(\mathbb{P}_U(\mathbb{L}))^* = (\mathbb{HSISP}_U(\mathbb{L}))^* \subseteq (\mathbb{HSP}_U(\mathbb{L}))^*$. Per tant, $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{HSP}_U(\mathbb{L})$, i l'altra inclusió és anàloga. □

5.5 IMTL-àlgebres bipartides

Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra bipartida. Recordem que aquestes àlgebres no tenen punt fix. És clar que per tot $a \in A$ $ord(a) = \infty$ o $ord(\neg a) = \infty$. Sigui $A_1 := \{a \in A : ord(a) = \infty \Leftrightarrow ord(\neg a) < \infty\}$ i $A_2 := \{a \in A : ord(a) = \infty, ord(\neg a) = \infty\}$. Aleshores, tenim:

- $A = A_1 \cup A_2$.

- $A_1 = \{0,1\}$ sii $\mathcal{A} \in \mathbb{BA}$.
- $A_2 = \emptyset$ sii $\mathcal{A}$ és perfecta.

Lema 91. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra. Llavors,*
$\forall a, b \in A \quad (ord(\neg(a * b)) < \infty \Rightarrow \neg a * \neg b = 0)$.

Prova: És un càlcul senzill. □

Proposició 92. *Si A_1 és un subunivers, llavors $A_1 = A_+ \cup A_-$ i A_+ és un filtre.*

Prova: Primer provarem que per tot $a \in A_1$ $(ord(a) = \infty \Rightarrow a \in A_+)$:
$ord(a) = \infty \Rightarrow ord(a^2) = \infty \Rightarrow ord(\neg a^2) < \infty$, ja que $a^2 \in A_1 \Rightarrow \neg a * \neg a = 0$ (pel lema anterior), $a < \neg a$.

Ara comprovem que $A_1 = A_+ \cup A_-$. Prenguem $a \in A_1$. Si $ord(a) = \infty$, llavors $a \in A_+$. Si $ord(a) < \infty$, llavors $ord(\neg a) = \infty$, i d'aquí $\neg a \in A_+$ i $a \in A_-$. Sigui ara $a \in A_+ \cup A_-$. Si $a \in A_+$, llavors $ord(\neg a) < \infty$ i $ord(a) = \infty$, i per tant $a \in A_1$. En canvi, si $a \in A_-$, llavors $ord(a) < \infty$ i $ord(\neg a) = \infty$, i per tant $a \in A_1$.

Finalment provarem que A_+ és un filtre. És suficient veure que és tancat per productes. Sigui $a \in A_+$; llavors $ord(a^2) = \infty$, i per tant $a^2 \in A_+$. Si $a, b \in A_+$, només cal veure que l'ordre de $a * b$ és infinit. Suposem que fos finit. Aleshores hi hauria un n tal que $(a*b)^n = 0$. Això implica que hi hauria un m tal que $(a * b)^{2^m} = 0$, i per tant $a^{2^m} \leq \neg b^{2^m}$, però això és contradictori ja que a^{2^m} i b^{2^m} són elements positius. □

Proposició 93. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra sense punt fix i sigui $M \subseteq A$ un filtre primer. Aleshores són equivalents:*

(1) $A_+ \subseteq M$.

(2) M *és maximal i* $A = M \cup \neg M$.

(3) $\mathcal{A}/M \cong \mathcal{B}_2$.

(4) M *és maximal i perfecte.*

Prova:

(1) ⇒ (2): Si $a \in A$, llavors per la proposició 4, $a \vee \neg a \in A_+ \subseteq F$, però atès que M és primer, $a \in M$ o $\neg a \in M$.

(2) ⇒ (3): D'una banda, M és primari pel corol·lari 69, i per tant $\mathcal{A}/M$ és local. De l'altra, per tot $a \in A$, $a/M \vee \neg(a/M) = (a \vee \neg a)/M = 1/M$, o sia, $\mathcal{A}/M$ és una àlgebra de Boole. En conseqüència, ha de ser isomorfa a l'àlgebra de Boole de dos elements.

(3) $\Rightarrow$ (4): Si $\mathcal{A}/M \cong \mathcal{B}_2$, llavors M és perfecte, car $\mathcal{B}_2$ és perfecta. A més, M és maximal ja que $\mathcal{B}_2$ és simple.

(4) $\Rightarrow$ (1): Prenguem $a \vee \neg a \in A_+$ i suposem que no pertany a M. Aleshores hi ha un $n \geq 1$ tal que $\neg(a \vee \neg a)^n \in M$, i per tant $n(\neg a) \wedge na \in M$, la qual cosa contradiu el fet que M és perfecte.

□

Això ens forneix una caracterització de les IMTL-àlgebres bipartides:

Teorema 94. *Una IMTL-àlgebra $\mathcal{A}$ és bipartida sii el filtre generat per A_+ és propi.*

Prova: La implicació d'esquerra a dreta se segueix immediatament de l'últim teorema. Per a demostrar l'altra, suposem que $\mathbb{F}i(A_+)$ és propi. Aleshores ha d'estar contingut en algun filtre maximal M, i per tant $A_+ \subseteq M$ i pel darrer teorema $A = M \cup \neg M$. □

Lema 95. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra sense punt fix i sigui $F \subseteq A$ un filtre. Aleshores: $\mathcal{A}/F \in \mathbb{BA}$ sii $A_+ \subseteq F$.*

Prova: Suposem que el quocient és una àlgebra de Boole i prenguem $a \in A_+$. Aleshores $a/F \vee \neg(a/F) = (a \vee \neg a)/F = 1/F$. Per tant: $a = a \vee \neg a \in F$. Recíprocament, és directe comprovar que $\mathcal{A}/F$ satisfà la llei del terç exclòs. □

Lema 96. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra bipartida. Aleshores:*
$\mathcal{A}$ és bipartida només per $\mathbb{F}i(A_+)$ sii $\mathbb{F}i(A_+)$ és un filtre maximal.

Prova: Suposem que $\mathbb{F}i(A_+)$ és un filtre maximal. $A_+ \subseteq \mathbb{F}i(A_+)$, i per tant $A = \mathbb{F}i(A_+) \cup \neg\mathbb{F}i(A_+)$. Si M és un filtre maximal i $A = M \cup \neg M$, llavors $A_+ \subseteq M$, i d'aquí: $\mathbb{F}i(A_+) = M$. □

Proposició 97. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra bipartida. Si A_+ és un filtre, llavors $A_1 = A_+ \cup A_-$.*

Prova: Pel lema 95 $\mathcal{A}/A_+ \in \mathbb{BA}$. Si existeix algun $a \in A_1 \backslash (A_+ \cup A_-)$, llavors a/A_+ no és ni $1/A_+$ ni $0/A_+$, i per tant $ord(a/A_+) = ord(\neg a/A_+) = \infty$, però això és inconsistent amb el fet que $a \in A_1$, puix que $ord(a) < \infty$ or $ord(\neg a) < \infty$. □

Amb aquests resultats arribem a una caracterització de les àlgebres de $\mathbb{BP}_0$:

Teorema 98. *Per tota IMTL-àlgebra $\mathcal{A}$ són equivalents:*

(1) $\mathcal{A} \in \mathbb{BP}_0$.

(2) $\mathcal{A}/Rad(\mathcal{A}) \in \mathbb{BA}$.

(3) $Rad(\mathcal{A}) = A_+$ *i* $\mathcal{A}$ *no té punt fix.*

Prova:

(1) $\Leftrightarrow$ (2): Per tot filtre maximal M, $A = M \cup \neg M$ sii (pel teorema 93) A_+ està contingut a tots els filtres maximals sii $A_+ \subseteq Rad(\mathcal{A})$. Pel lema 95 això és equivalent a $\mathcal{A}/Rad(\mathcal{A}) \in \mathbb{BA}$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Pel lema 95 obtenim que $A_+ \subseteq Rad(\mathcal{A})$; l'altra inclusió sempre és certa.

(3) $\Rightarrow$ (2): Surt també del lema 95.

□

Dins de la classe de les àlgebres bipartides aquesta caracterització es particularitza de la següent manera:

Proposició 99. *Per tota IMTL-àlgebra bipartida* $\mathcal{A}$ *són equivalents:*

(1) A_1 *és un subunivers.*

(2) A_+ *és un filtre.*

(3) $\mathcal{A} \in \mathbb{BP}_0$.

Prova:

(1) $\Rightarrow$ (2): Ha estat vist a la proposició 92.

(2) $\Rightarrow$ (3): Se segueix de l'últim teorema.

(3) $\Rightarrow$ (1): Si $\mathcal{A} \in \mathbb{BP}_0$, llavors pel darrer teorema A_+ és un filtre. Finalment usant la proposició 97 arribem al resultat.

□

Corol·lari 100. *Tota IMTL-àlgebra perfecta és de* $\mathbb{BP}_0$.

A més aquesta classe d'àlgebres bipartides resulta ser una varietat:

Teorema 101. $\mathbb{BP}_0$ *és una varietat. Se'n pot obtenir una axiomatització equacional afegint el següent conjunt d'equacions a la base equacional d'*$\mathbb{IMTL}$*:*

$$\{(x \wedge \neg x) \rightarrow (x \vee \neg x)^n \approx 1 : n \geq 1\}$$

Prova: Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra. $\mathcal{A} \in \mathbb{BP}_0$ sii $Rad(\mathcal{A}) = A_+$ sii (pel teorema 60) per tot $a \in A_+$ i tot $n \geq 1$, $a^n \geq \neg a$ sii (per la proposició 4) $\mathcal{A} \models (x \wedge \neg x) \to (x \vee \neg x)^n \approx 1$ per tot $n \geq 1$. □

Corol·lari 102. *$\mathbb{BP}_0$ és la varietat generat per totes les IMTL-àlgebres perfectes, és a dir, per totes les rotacions inconnexes de semihoops bàsics.*

Prova: Sigui $\mathbb{K}$ la varietat generada per les IMTL-àlgebres perfectes. Pel corol·lari 100, $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{BP}_0$. L'altra inclusió se segueix de la representació en producte subdirecte de cadenes i del teorema 57. □

Corol·lari 103. *Hi ha una axiomatització de $\mathbb{BP}_0$ més simple, la que s'obté afegint als axiomes d'$\mathbb{IMTL}$ només aquest:*

$$BP(x) \approx 1$$

Prova: Sigui $\mathbb{K}$ la varietat les IMTL-àlgebres que satisfan aquesta equació. Cal demostrar que $\mathbb{K} = \mathbb{BP}_0$. Si $\mathcal{A} \in \mathbb{K}$, llavors pel teorema de representació $\mathcal{A}$ és representable com a producte subdirecte de cadenes que satisfan l'equació. Pel teorema 57 aquestes cadenes són de $\mathbb{BP}_0$; per tant, $\mathcal{A} \in \mathbb{BP}_0$. Recíprocament, prenguem $\mathcal{A} \in \mathbb{BP}_0$. Aleshores $\mathcal{A}$ és isomorfa a un producte subdirecte d'IMTL-cadenes de $\mathbb{BP}_0$, i per tant satisfà l'equació. □

En el cas de les MV-àlgebres és sabut que la varietat generada per les perfectes coincideix amb la varietat generada per la cadena de Chang i que només conté un subvarietat pròpia i no trivial, a saber, la de les àlgebres de Boole. Ara bé, tal com mostra el teorema 90, a $\mathbb{IMTL}$ la varietat $\mathbb{BP}_0$ és d'una complexitat enorme. Tanmateix, aquesta varietat no conté totes les àlgebres bipartides, com ja hem observat més amunt. A continuació, veurem que la classe de les IMTL-àlgebres bipartides de fet no és una varietat i calcularem quina és la varietat que genera.

Proposició 104. *La classe de les IMTL-àlgebres bipartides és tancada per subàlgebres.*

Teorema 105. *Sigui $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ un conjunt d'IMTL-àlgebres i sigui $\mathcal{A}$ llur producte directe. Si hi ha algun $j \in I$ tal que $\mathcal{A}_j$ és bipartida, llavors $\mathcal{A}$ també és bipartida.*

Prova: Es pot demostrar utilitzant la mateixa argumentació que s'usa al teorema 4.5 de [12] per al resultat anàleg amb MV-àlgebres. □

Corol·lari 106. *La classe de les IMTL-àlgebres bipartides és tancada per productes directes.*

Corol·lari 107. *La varietat generada per totes les IMTL-àlgebres bipartides és* $\mathbb{IMTL}$.

Prova: Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra arbitrària . Considerem $\mathcal{A} \times \mathcal{B}_2$, que és bipartida per ser-ho $\mathcal{B}_2$. Per tant, prenent la projecció sobre la primera component, obtenim que $\mathcal{A}$ és la imatge homomòrfica d'una àlgebra bipartida. En conseqüència, tota IMTL-àlgebra forma part de la varietat generada per les bipartides. □

Finalment observem que la lògica donada per la varietat $\mathbb{BP}_0$, o sia, l'extensió axiomàtica d'IMTL que s'obté afegint com a axioma $BP(x)$, no té completesa estàndard. En efecte, com que cap IMTL-àlgebra bipartida no té punt fix, llavors no hi ha àlgebres estàndard bipartides (ja que tota negació involutiva definida en $[0, 1]$ té punt fix).

5.6 Addició de punt fix a les IMTL-àlgebres perfectes i rotacions connexes de MTL-àlgebres sense divisors de zero

En aquest darrer apartat, definirem una construcció consistent a afegir un punt fix a les àlgebres perfectes per tal de relacionar-les també amb les rotacions connexes.

Teorema 108. *Sigui* $\mathcal{A}$ *una IMTL-àlgebra perfecta. Definim una nova àlgebra* $\mathcal{A}^+$ *afegint un nou element* $a \notin A$ *de manera que:*

- $a < b$ *per tot* $b \in A_+$.
- $b < a$ *per tot* $b \in A_-$.
- $\neg a = a$.
- $a * b = b * a = a$ *per tot* $b \in A_+$.
- $a * b = b * a = 0$ *per tot* $b \in A_-$.

Aleshores, $\mathcal{A}^+$ *és una IMTL-àlgebra amb punt fix tal que* $Rad(\mathcal{A}^+) = (A^+)_+$. *Direm que* $\mathcal{A}^+$ *és una àlgebra perfecta amb punt fix afegit.*

Prova: Només cal comprovar rutinàriament l'associativitat de $*$. □

A més, aquesta construcció és canònica en el sentit que és l'única manera possible d'afegir un punt fix a una àlgebra perfecta:

Teorema 109. *Sigui $\mathcal{B}$ una IMTL-àlgebra amb punt fix tal que $B = B_+ \cup B_-$ i $Rad(\mathcal{B}) = B^+$. Sigui a el punt fix. Aleshores, $a * b = a$ per tot $b \in A_+$.*

Prova: Prenem $b > a$. Tenim que $a * b \leq a$. Suposem que no valgués la igualtat, o sia, $a * b < a$. Aleshores, $\neg(a * b) \in A_+$, i d'aquí $b * \neg(a * b) \in A_+$. Llavors tindríem que $a * (b * \neg(a * b)) = (a * b) * \neg(a * b) = 0$, però això és absurd ja que $a > \neg(b * \neg(a * b))$. $\square$

Corol·lari 110. *La correspondència $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^+$ dóna lloc a un functor covariant functor de la categoria de les àlgebres perfectes a la categoria de les àlgebres perfectes amb punt fix afegit.*[7]

A més, hom pot caracteritzar la construcció d'afegir punt fix a les àlgebres perfectes en termes de coproductes:[8]

Definició 111. *Donada una família d'IMTL-àlgebres $\{\mathcal{A}_j \mid j \in J\} \subseteq \mathbb{IMTL}$, diem que una IMTL-àlgebra $\mathcal{A}$ és el coproducte de la família sii existeixen uns homomorfismes $\{h_j : \mathcal{A}_j \to \mathcal{A} \mid j \in J\}$ tals que per tota $\mathcal{B} \in \mathbb{IMTL}$ i tota família d'homomorfismes $\{f_j : \mathcal{A}_j \to \mathcal{B} \mid j \in J\}$, hi ha un únic $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tal que $f \circ h_j = f_j \quad \forall j \in J$. En aquest cas escrivim $\mathcal{A} = \coprod_{j \in J} \mathcal{A}_j$.*

És un problema obert escatir si per tota família d'IMTL-àlgebres existeix o no el seu coproducte i trobar-lo en cas afirmatiu. Ara bé, sí que podem assegurar que existeix el coproducte de qualsevol IMTL-àlgebra perfecta amb $Ł_3$ i a més el sabem calcular:

Teorema 112. *Si $\mathcal{A}$ és una IMTL-àlgebra perfecta, llavors $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A} \amalg Ł_3$.*

Prova: Suposem que $a \in A$ és el punt fix d'$\mathcal{A}$. Sigui $h_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^+$ l'aplicació identitat i $h_2 : Ł_3 \to \mathcal{A}^+$ tal que $h_2(0) = 0$, $h_2(\frac{1}{2}) = a$ i $h_2(1) = 1$. Prenem una àlgebra arbitrària $\mathcal{B} \in \mathbb{IMTL}$ i uns homomorfismes també arbitraris $f_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ i $f_2 : Ł_3 \to \mathcal{B}$. En conseqüència, $\mathcal{B}$ ha de tenir punt fix, a saber $f_2(\frac{1}{2})$. Aleshores l'homomorfisme $f : \mathcal{A}^+ \to \mathcal{B}$ definit per $f(a) = f_2(\frac{1}{2})$ i $f(x) = f_1(x)$ per tot $x \neq a$, és el desitjat. $\square$

Les àlgebres perfectes amb punt fix afegit corresponen a les rotacions connexes de MTL-àlgebres sense divisors de zero:

Teorema 113. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra. Aleshores són equivalents:*

[7] Assumim un coneixement elemental de la teoria de categories. Es pot trobar per exemple a [37].

[8] Agraïm al professor Antonio Di Nola que dirigís la nostra atenció cap a aquest aspecte categorial de la construcció.

(1) $\mathcal{A}$ és una àlgebra perfecta amb punt fix afegit.

(2) $\mathcal{A}$ és isomorfa a la rotació connexa d'una MTL-àlgebra sense divisors de zero.

Prova:

(1) $\Rightarrow$ (2): Sigui a el punt fix de l'àlgebra. Considerem la MTL-àlgebra $\mathcal{B}$ definida sobre $Rad(\mathcal{A}) \cup \{a\}$ tal que $0^{\mathcal{B}} = a$. Com que el radical és tancat per productes, resulta que $\mathcal{B}$ és una MTL-àlgebra sense divisors de zero. Aleshores és obvi que $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}^{\star}$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Si $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}^{\star}$ per alguna MTL-àlgebra $\mathcal{B}$ sense divisors de zero, llavors és obvi que tots els elements positius tenen ordre infinit i tots els elements negatius tenen ordre finit, i per tant és una perfecta amb punt fix afegit.

$\square$

Tal com hem fet amb les àlgebres perfectes, estudiarem la varietat que generen aquestes àlgebres i examinarem els quocients pel radical.

Proposició 114. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra perfecta. Llavors, $\mathcal{A}^+/Rad(\mathcal{A}^+) \cong$ $Ł_3$.*

Prova: Sigui a el punt fix de $\mathcal{A}^+$. Aleshores és senzill comprovar que el quocient té exactament tres classes d'equivalència: $0/Rad(\mathcal{A}^+)$,$a/Rad(\mathcal{A}^+)$ i $1/Rad(\mathcal{A}^+)$. A més, $(a/Rad(\mathcal{A}^+))^2 = a^2/Rad(\mathcal{A}^+) = 0/Rad(\mathcal{A}^+)$. Per tant, $\mathcal{A}^+/Rad(\mathcal{A}^+) \cong Ł_3$. $\square$

Tanmateix, en aquest cas el quocient no caracteritza les àlgebres perfectes amb punt fix afegit, ja que hi ha exemples d'IMTL-àlgebres tals que el quocient pel seu radical és isomorf a $Ł_3$ però no són d'aquest tipus. Per exemple, fins i tot dins de $\mathbb{MV}$ podem trobar aquest tipus de contraexemple: basta considerar $Ł_3^{\omega}$.

Definició 115. *Sigui $\mathbb{BP}_0^+$ la varietat generada per totes les IMTL-àlgebres perfectes amb punt fix afegit.*

És obvi que $\mathbb{BP}_0 \subsetneq \mathbb{BP}_0^+$, car $Ł_3 \in \mathbb{BP}_0^+ \setminus \mathbb{BP}_0$.

Teorema 116. *Una base equacional per a $\mathbb{BP}_0^+$ és la que s'obté en afegir als axiomes d'$\mathbb{IMTL}$ els següents:*

1. $((\neg(\neg x)^2)^2 \leftrightarrow \neg(\neg x^2)^2) \vee (x \leftrightarrow \neg x) \approx 1$

2. $(x \vee \neg x \to y \vee \neg y) \vee ((y \vee \neg y \to y \wedge \neg y) \to y \vee \neg y) \vee (((x \vee \neg x)^2 \to y \vee \neg y) \to y \vee \neg y) \approx 1$

Prova: Sigui $\mathbb{K}$ la varietat d'IMTL-àlgebres determinada per aquestes dues equacions. Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra tal que $Rad(\mathcal{A}) = A_+$ i vegem que satisfà les dues equacions. $\mathcal{A}$ és o bé perfecta o bé perfecta amb punt fix afegit; en ambdós casos es comprova fàcilment que $\mathcal{A} \models ((\neg(\neg x)^2)^2 \leftrightarrow \neg(\neg x^2)^2) \vee (x \leftrightarrow \neg x) \approx 1$. Vegem que també satisfà la segona. Siguin $a, b \in A$. Si a és el punt fix, llavors $a \vee \neg a \to b \vee \neg b = 1$ i es satisfà l'equació. Suposem ara que b és el punt fix i que a no ho és. $a \vee \neg a > b$, per tant, $(a \vee \neg a)^2 > b$. Així, $(a \vee \neg a)^2 \to b = b$. Suposem, finalment, que ni a ni b són punt fix. Llavors $b \vee \neg b \to b \wedge \neg b \in A_-$, i d'aquí $(b \vee \neg b \to b \wedge \neg b) \to b \vee \neg b = 1$. Per tant, $\mathbb{BP}_0^+ \subseteq \mathbb{K}$.

Per tal de provar l'altra inclusió, tenint en compte el teorema de representació en producte subdirecte de cadenes, només cal demostrar que tota cadena que satisfaci les equacions és o bé perfecta o bé perfecta amb punt fix afegit. Sigui $\mathcal{C}$ una cadena de $\mathbb{K}$. Sigui $a \in C_+$; vegem que $a^2 \in C_+$. Del fet que $\mathcal{C}$ satisfà la primera equació, se segueix que $a^2 \in C_+$ o és punt fix. Si $a^2 = b = \neg b$, llavors la segona equació quedaria $(a \to b) \vee ((b \to b) \to b) \vee ((a^2 \to b) \to b) = (a \to b) \vee b \vee b = a \to b = 1$, per tant, $a \leq b$ i això és absurd. Així, donats $a, b \in C_+$ tals que $a \leq b$, tenim que $a * b \geq a^2 \in C_+$; per tant, C_+ és tancat per productes i d'aquí que $\mathcal{C}$ sigui una cadena perfecta o bé perfecta amb punt fix afegit. $\square$

Acabarem provant que, a diferència del que passava amb la varietat $\mathbb{BP}_0$, $\mathbb{BP}_0^+$ sí que defineix una lògica amb completesa estàndard.

Teorema 117. *La lògica associada a la varietat $\mathbb{BP}_0^+$ té completesa estàndard forta.*

Prova: Sigui $\mathcal{A} \in \mathbb{BP}_0^+$ una cadena comptable. Pel que hem vist a la prova del teorema anterior, sabem que $\mathcal{A}$ és o bé perfecta o bé perfecta amb punt fix afegit. Vegem que en qualsevol cas es pot submergir en una cadena de $\mathbb{BP}_0^+$ definida sobre $[0, 1]$. Considerem la completació de Jenei i Montagna aplicada en aquest cas al semihoop bàsic donat per $Rad(\mathcal{A})$ i de manera que es faci a una àlgebra $\mathcal{C}$ sobre $[0.6, 1]$ enlloc de fer-se a $[0, 1]$ com és habitual. Per tant, tenim una injecció $h : Rad(\mathcal{A}) \to [0.6, 1]$ tal que és homomorfisme respecte a $*$, és monòtona i $h(1^{\mathcal{A}}) = 1$. L'estenem a $\hat{h} : A \to [0, 1]$ requerint:

- $\hat{h}(a) = h(a)$, si $a \in Rad(\mathcal{A})$,
- $\hat{h}(\neg a) = 1 - h(a)$, si $\neg a \in \neg Rad(\mathcal{A})$ i

- $\hat{h}(a) = \frac{1}{2}$, si a és el punt fix de $\mathcal{A}$.

Considerem ara una àlgebra $\mathcal{B}$ sobre $[0.5, 1]$ amb les següents operacions:

$$a *^{\mathcal{B}} b := \begin{cases} a *^{\mathcal{C}} b & \text{si } a, b \in [0.6, 1] \\ a & \text{si } a \in [0.5, 0.6) \text{ i } b \in [0.6, 1] \\ b & \text{si } a \in [0.6, 1] \text{ i } b \in [0.5, 0.6) \\ \min\{a, b\} & \text{si } a, b \in [0.5, 0.6) \end{cases}$$

$$a \to^{\mathcal{B}} b := \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ a \to^{\mathcal{C}} b & \text{si } a > b \text{ i } a, b \in [0.6, 1] \\ b & \text{si } a \in [0.6, 1] \text{ i } b \in [0.5, 0.6) \\ b & \text{si } a > b \text{ i } a, b \in [0.5, 0.6) \end{cases}$$

Amb aquestes operacions i amb l'ordre natural $\mathcal{B}$ és una MTL-àlgebra sense divisors de zero. Considerem la seva rotació connexa $\mathcal{B}^\star$ definida sobre $[0, 1]$. Llavors, $\mathcal{B}^\star \in \mathbb{BP}_0^+$ i $\hat{h}$ és una immersió de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}^\star$, i per tant el teorema queda demostrat. $\square$

6 Varietats de NM-àlgebres

A [20] s'ha estudiat la varietat de les NM-àlgebres, $\mathbb{NM}$. Concretament, en aquest article s'arriba a donar una descripció exhaustiva del reticle de subvarietats de NM-àlgebres i, per tant, totes les extensions axiomàtiques de la lògica del Nilpotent Mínim queden classificades. En aquesta secció resumirem aquest treball.

Recordem que $\mathbb{NM}$ és la subvarietat de $\mathbb{IMTL}$ definida per l'equació $(x * y \to 0) \vee (x \wedge y \to x * y) \approx 1$.

La cadena estàndard $[0,1]_{NM}$ és definida per:

$$a * b := \begin{cases} \min\{a,b\} & \text{si } a > 1-b, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

$$a \to b := \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b, \\ \max\{1-a,b\} & \text{altrament.} \end{cases}$$

$a \wedge b := \min\{a,b\}$ i $a \vee b := \max\{a,b\}$.

Per cada $n \geq 1$ es defineix la NM-cadena de $2n$ elements com $\mathcal{N}_{2n} := \langle\{-n,-(n-1),\dots,-1,1,\dots,n-1,n\},*,\to,\wedge,\vee,-n,n\rangle$ i la NM-cadena de $2n+1$ elements com $\mathcal{N}_{2n+1} := \langle\{-n,-(n-1),\dots,-1,0,1,\dots,n-1,n\},*,\to,\wedge,\vee,-n,n\rangle$ prenent en tots els casos:

$$a * b := \begin{cases} \min\{a,b\} & \text{si } a > -b, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

$$a \to b := \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b, \\ \max\{-a,b\} & \text{altrament.} \end{cases}$$

$a \wedge b := \min\{a,b\}$ i $a \vee b := \max\{a,b\}$.

A més $[0,1]_{NM}$ és l'única NM-cadena sobre $[0,1]$ llevat d'isomorfisme, i per cada $n \geq 1$ $\mathcal{N}_n$ és l'única NM-cadena amb n elements llevat d'isomorfisme.

Observem, a la llum de la secció anterior, que totes aquestes cadenes són o bé perfectes (en cas que no tinguin punt fix) o bé "perfectes més punt fix". De fet, això és cert per a tota tota NM-cadena; per tant: $\mathbb{NM} \subseteq \mathbb{BP}_0^+$.

Donada una NM-cadena $\mathcal{C}$ amb punt fix denotarem amb $\mathcal{C}^-$ la subàlgebra que s'obté en prescindir del punt fix. Notem que amb aquesta notació tenim: $\mathcal{N}_{2n} = \mathcal{N}_{2n+1}^-$.

Teorema 118 ([20]). *Una varietat de NM-àlgebres és una subvarietat pròpia de* $\mathbb{NM}$ *sii no conté* $\mathcal{N}_n$ *per algun* $n \geq 1$.

Corol·lari 119 ([20]). *Sigui* $\mathcal{A}$ *una NM-cadena infinita amb punt fix. Llavors* $\mathbb{V}(\mathcal{A}) = \mathbb{NM}$.

Teorema 120 ([20]). $\mathbb{NM}$ *és una varietat localment finita, o sia, tota subàlgebra finitament generada d'una àlgebra de* $\mathbb{NM}$ *és finita.*

Conjuntament amb el teorema de completesa respecte a cadenes això implica que la lògica del Nilpotent Mínim és decidible. També obtenim el següent corol·lari:

Corol·lari 121 ([20]). *Tota varietat de NM-àlgebres és generada per les seves cadenes finites.*

Això permet fer la següent classificació de les subvarietats de $\mathbb{NM}$:

Teorema 122 ([20]). *Tota subvarietat pròpia de NM és d'un dels següents tipus:*

1. $\mathbb{V}([0,1]^-_{NM}) = \mathbb{V}(\{\mathcal{N}_{2n} : n \geq 1\})$ *o*
2. $\mathbb{V}(\mathcal{N}_{2n+1})$ *o*
3. $\mathbb{V}(\mathcal{N}_{2n})$ *o*
4. $\mathbb{V}([0,1]^-_{NM}, \mathcal{N}_{2n+1})$ *o*
5. $\mathbb{V}(\mathcal{N}_{2n}, \mathcal{N}_{2m+1})$, *amb* $m < n$.

El citat article, a més, dóna bases equacionals per a cadascuna d'aquestes varietats. A tal efecte definim per a cada $n \geq 2$ el següent terme: $S_n(x_0, \ldots, x_n) := \bigwedge_{i<n}(x_i \to x_{i+1}) \to \bigvee_{i<n+1} x_i$.

Teorema 123 ([20]). *Sigui* $\mathcal{A}$ *una NM-cadena qualsevol. Aleshores:*

1. $\mathcal{A} \models S_n(x_0, \ldots, x_n) \approx 1$ *si, i només si, té menys de* $2n+2$ *elements.*
2. $\mathcal{A} \models BP(x) \approx 1$ *si, i només si, no té punt fix.*

Corol·lari 124 ([20]). *Les subvarietats pròpies de* $\mathbb{NM}$ *admeten les següents axiomatitzacions (dins de* $\mathbb{NM}$*):*

1. $\mathbb{V}([0,1]^-_{NM})$ *és axiomatitzada per* $BP(x) \approx 1$.

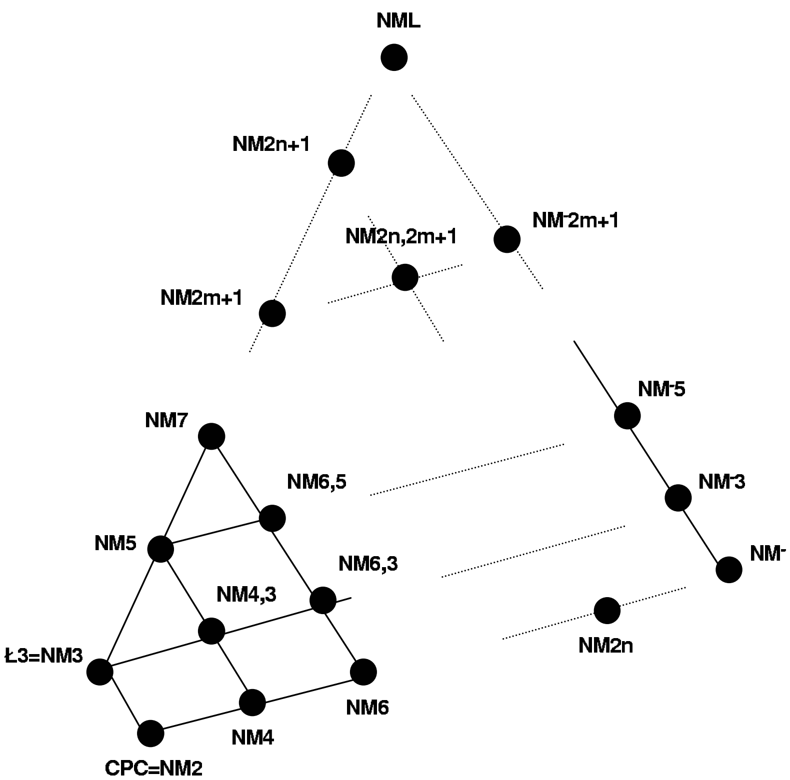
2. $\mathbb{V}(\mathcal{N}_{2n+1})$ *és axiomatitzada per* $S_n(x_0, \ldots, x_n) \approx 1$.

3. $\mathbb{V}(\mathcal{N}_{2n})$ *és axiomatitzada per* $S_n(x_0, \ldots, x_n) \approx 1$ *i* $BP(x) \approx 1$.

4. $\mathbb{V}([0,1]^-_{NM}, \mathcal{N}_{2n+1})$ *és axiomatitzada per* $BP(x) \vee S_n(x_0, \ldots, x_n) \approx 1$.

5. $\mathbb{V}(\mathcal{N}_{2n}, \mathcal{N}_{2m+1})$ *és axiomatitzada per* $(BP(x) \wedge S_n(x_0, \ldots, x_n)) \vee S_m(x_0, \ldots, x_m) \approx$

Fig2. Lattice of Axiomatic Extensions of NML



7 IMTL-àlgebres n-contractives

A [35] Kowalski i Ono estudien algunes varietats de reticles residuats. En particular, consideren per cada $n \geq 2$ aquelles varietats definides per les equacions següents:

(E_n) $x^n \approx x^{n-1}$

(EM_n) $x \vee \neg x^{n-1} \approx 1$

(E_2) correspon de fet la llei de contracció, que defineix la varietat de les àlgebres de Heyting. Així, per a cada $n \geq 3$ l'equació (E_n) correspon a una forma feble de contracció que anomenarem *n-contracció*. D'altra banda, observem que (EM_2) és la forma algebraica de la llei del terç exclòs i per $n \geq 3$ (EM_n) correspon a una forma feble d'aquesta llei (això justifica el nom (EM_n) per *excluded middle n-èsim*).

Ciabattoni, Esteva i Godo a [8] traslladen aquestes varietats a l'àmbit de la Lògica Borrosa, o sia, consideren aquelles extensions axiomàtiques de MTL i d'$IMTL$ obtingudes amb els axiomes de n-contracció: les lògiques borroses n-contractives. En efecte, per cada $n \geq 2$ es defineix l'axioma de la n-contracció com:

$$\varphi^{n-1} \to \varphi^n \qquad (C_n)$$

L'extensió d'MTL (resp. IMTL) afegint aquest axioma és anomenada $C_n - MTL$ (resp. $C_n - IMTL$).

Per cada $n \geq 2$ la semàntica algebraica equivalent de $C_n - MTL$ (resp. $C_n - IMTL$) és la classe de les MTL-àlgebres (resp. IMTL-àlgebres) n-contractives, o sia, la subvarietat d'$\mathbb{MTL}$ (resp. $\mathbb{IMTL}$) definida (E_n).

Observem que tota MTL-àlgebra finita és n-contractiva per algun $n \geq 2$.

En el mateix article a més es demostra la completesa estàndard forta de cadascuna d'aquestes lògiques:

Teorema 125. *Per cada conjunt (potser infinit) de fórmules $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ i per cada $n \geq 3$,*

$\Gamma \vdash_{C_n - MTL} \varphi$ *si, i només si, per tota IMTL-àlgebra $\mathcal{A}$ donada per una t-norma contínua per l'esquerra n-contractiva i per tota valoració v de les fórmules a $\mathcal{A}$ tal que $v[\Gamma] \subseteq \{1\}$, tenim $v(\varphi) = 1$, i també*

$\Gamma \vdash_{C_n-IMTL} \varphi$ *si, i només si, per tota IMTL-àlgebra* $\mathcal{A}$ *donada per una t-norma contínua per l'esquerra involutiva i* n*-contractiva i per tota valoració* v *de les fórmules a* $\mathcal{A}$ *tal que* $v[\Gamma] \subseteq \{1\}$, *tenim* $v(\varphi) = 1$.

És fàcil veure que $C_2 - IMTL$ és equivalent a la lògica proposicional clàssica i que $C_2 - MTL$ és equivalent a la lògica de Gödel. A més, per cada $n \geq 3$, NM és una extensió estricta de $C_n - IMTL$, WNM és una extensió estricta de $C_n - MTL$, $C_n - IMTL$ és una extensió estricta de $C_{n+1} - IMTL$ i $C_n - MTL$ és una extensió estricta de $C_{n+1} - MTL$.

A més, a [35] Kowalski i Ono demostren el següent resultat:

Proposició 126 (Prop 1.11, [35]). *Sigui* $\mathbb{K}$ *una varietat de reticles residuats. Llavors* $\mathbb{K}$ *té la propietat EDPC (equationally definable principal congruences) si, i només si,* $\mathbb{K} \models (E_n)$, *per algun* $n \geq 2$.

Segons un dels teoremes pont de la Lògica Algebraica Abstracta, una lògica algebritzable té teorema de la deducció global si, i només si, la seva semàntica algebraica equivalent té la propietat EDPC.

Concentrant-nos en l'objecte del nostre estudi, les lògiques borroses involutives, tots aquests resultats en definitiva mostren la bondat de les lògiques borroses involutives n-contractives, ja que gaudeixen de completesa estàndard forta i de la teorema de la deducció global. A més, juntament amb les seves extensions axiomàtiques, són les úniques lògiques borroses involutives amb aquest tipus de teorema de la deducció. Això justifica, creiem, que siguin una bona elecció a l'hora d'escollir una subclasse interessant de lògiques borroses involutives per estudiar. La resta d'aquesta secció recull els primers resultats que hem obtingut en aquesta direcció.

7.1 Àlgebres n-contractives subdirectament irreductibles, simples i semisimples

En primer lloc caracteritzem les àlgebres n-contractives subdirectament irreductibles:

Proposició 127. *Sigui* $\mathcal{A}$ *una IMTL-cadena* n*-contractiva. Aleshores:*

$\mathcal{A}$ *és subdirectament irreductible si, i només si, el conjunt dels elements idempotents diferents de* 1 *té un màxim.*

Prova: Si és subdirectament irreductible, existeix F_0 el mínim filtre no trivial. Prenem $a \in F_0 \backslash \{1\}$. És fàcil veure que a^{n-1} és un element idempotent diferent de 1. A més, $F_0 = [a^{n-1}, 1]$. Si $b \neq 1$ és un altre idempotent, llavors

$\mathbb{F}i(b) = [b, 1]$ i $[a^{n-1}, 1] \subseteq [b, 1]$, i per tant $b \leq a^{n-1}$. Recíprocament, si a és el màxim dels idempotents diferents de 1, és senzill comprovar que $[a, 1]$ és el mínim filtre no trivial. $\square$

Recordem que una IMTL-àlgebra $\mathcal{A}$ és simple si, i només si, els seus únics filtres són A i $\{1\}$. Per tant, és fàcil demostrar el següent lema:

Lema 128. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra. $\mathcal{A}$ és simple sii* $\forall a \in A \backslash \{1\} \quad \exists k \geq 1$ *tal que* $a^k = 0$.

Això ens permet caracteritzar la simplicitat en el cas de les cadenes n-contractives:

Proposició 129. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-cadena. Són equivalents:*

(1) $\mathcal{A} \models (EM_n)$.

(2) $\mathcal{A}$ és n-contractiva i simple.

Prova:

$(1) \Rightarrow (2)$: Si $\mathcal{A} \models \neg x^{n-1} \vee x \approx 1$, llavors per tot $a \in A \setminus \{1\}$ $a^{n-1} = 0$.

$(2) \Rightarrow (1)$: Suposem que la cadena és n-contractiva i simple. Aleshores per tot $a \in A \setminus \{1\}$ i, pel lema anterior, hi ha un $k \geq 1$ tal que $a^k = 0$; per tant, per n-contractivitat, $a^{n-1} = 0$.

$\square$

Recordem també que una IMTL-àlgebra $\mathcal{A}$ és semisimple si, i només si, és representable com a producte subdirecte d'àlgebres simples, i això és equivalent a: $Rad(\mathcal{A}) = \{1\}$.

Corol·lari 130. *Per cada $n \geq 2$, la classe de les IMTL-àlgebra n-contractives semisimples és la varietat axiomatitzada per l'equació (EM_n). La denotarem amb $\mathbb{S}_n$.*

Per cada $n \geq 2$ sigui $\mathbb{C}_n$ la varietat de les IMTL-àlgebres n-contractives.

En el cas de les MV-àlgebres aquestes varietats presenten un aspecte ben senzill:

Lema 131. *Sigui $\mathcal{A}$ una MV-cadena. Són equivalents:*

(i) $\mathcal{A} \models (E_n)$.

(ii) $\mathcal{A} \in \mathbb{I}(\{Ł_1, \ldots, Ł_n\})$.

(iii) $\mathcal{A} \models (EM_n)$.

Prova:

(i)⇒(ii): Si $\mathcal{A} \models x^n \approx x^{n-1}$, llavors $\mathcal{A} \models nx \approx (n-1)x$ i, d'aquí, $ord(\mathcal{A}) \leq n$. Per tant, $\mathcal{A} \cong Ł_k$ per algun $k \leq n$.

(ii)⇒(iii): Per tot $k \leq n$, $Ł_k$ és n-contractiva i simple. Per tant, només cal aplicar la proposició 129.

(iii)⇒(i): Per la proposició 129.

□

Corol·lari 132. *Per tot $n \geq 2$, $\mathbb{S}_n \cap \mathbb{MV} = \mathbb{C}_n \cap \mathbb{MV} = \mathbb{V}(\{Ł_1, \ldots, Ł_n\})$.*

Observem que $\mathbb{S}_2 = \mathbb{C}_2 = \mathbb{BA}$, per tant, aquí es manté la igualtat com en el cas de les MV-àlgebres; al següent nivell ja apareix la primera diferència: $\mathbb{S}_3 = \mathbb{V}(Ł_3) = \mathbb{NM} \cap \mathbb{MV} \subsetneq \mathbb{NM} \subseteq \mathbb{C}_3$. Per tant, per tot $n \geq 3$, $\mathbb{S}_n \subsetneq \mathbb{C}_n$. La varietat $\mathbb{S}_4$ ha estat estudiada a [22], on es dóna tot el seu reticle de subvarietats.

Definició 133. *Per a tot $n \geq 3$, definim $\Delta_n(x, y) := (x \leftrightarrow y)^{n-1}$.*

Observem que si a, b són elements d'una IMTL-cadena n-contractiva i simple, llavors:

- $a = b \Leftrightarrow \Delta_n(a, b) = 1$.
- $a \neq b \Leftrightarrow \Delta_n(a, b) = 0$.

D'aquí en treiem una caracterització equacional per a les àlgebres que no tenen punt fix:

Proposició 134. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-cadena n-contractiva i simple. Aleshores, $\mathcal{A}$ no té punt fix sii $\mathcal{A} \models \Delta_n(x, \neg x) \approx 0$.*

Proposició 135. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-cadena n-contractiva i simple i siguin $a_1, \ldots, a_{n-2} \in A \backslash \{1\}$. Si $a_1 * \ldots * a_{n-2} \neq 0$, llavors $a_1 * \ldots * a_{n-2} = minA \backslash \{0\}$.*

Prova: Donat un $c \neq 0$ qualsevol, cal veure que $a_1 * \ldots * a_{n-2} \leq c$. Sigui $d := a_1 \vee \ldots \vee a_{n-2} \vee \neg c \neq 1$; per tant: $d^{n-1} = 0$. Aleshores, $a_1 * \ldots * a_{n-2} \rightarrow c = \neg(a_1 * \ldots * a_{n-2} * \neg c) \geq \neg d^{n-1} = 1$. □

Corol·lari 136. *En tota IMTL-cadena n-contractiva i simple $\mathcal{A}$, hi ha un element a tal que $a = maxA \setminus \{1\}$ i $\neg a = minA \setminus \{0\}$.*

En conseqüència, les IMTL-cadenes n-contractives definides per una t-norma contínua per l'esquerra no poden ser simples, i per tant no es pot demostrar cap teorema de completesa estàndard per a $\mathbb{S}_n$:

Corol·lari 137. *Per cada $n \geq 2$, la lògica determinada per la varietat $\mathbb{S}_n$ no té completesa estàndard.*

7.2 Àlgebres n-contractives perfectes

En aquest apartat ens fixarem en un altre tipus d'IMTL-àlgebres n-contractives, les perfectes, que, a diferència de les semisimples que acabem d'examinar per a les quals el radical era $\{1\}$, tenen el radical el més gran possible, és a dir, igual al conjunt dels elements positius.

Notem que en una àlgebra n-contractiva $\mathcal{A}$, per tot $a \in A$, $ord(a) < \infty$ sii $a^{n-1} \neq 0$.

Les cadenes 3-contractives sense punt fix són els primers exemples que trobem d'àlgebres contractives i perfectes:

Proposició 138. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-cadena 3-contractiva. Aleshores, $Rad(\mathcal{A}) = A_+$.*

Prova: Siguin $a, b \in A_+$ tals que $a \leq b$. Aleshores $a > \neg a$, o sia, $a^2 \neq 0$. A més, $a^2 = a^4$, i d'aquí $a^2 \in A_+$. Per tant, $a * b \in A_+$ ja que $a * b \geq a^2$. □

Corol·lari 139. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-cadena 3-contractiva. Aleshores:*

(1) Si $\mathcal{A}$ no té punt fix, llavors és perfecta.

(2) Si $\mathcal{A}$ té punt fix, llavors és el coproducte d'una cadena 3-contractiva perfecta amb $Ł_3$.

Per tant: $\mathbb{C}_3 \subseteq \mathbb{BP}_0^+$.

Aquests resultats no es poden estendre a graus superiors de contractivitat. Per exemple, $Ł_4$ és una cadena 4-contractiva sense punt fix però no és perfecta. La inclusió contrària no és certa car hi ha IMTL-cadenes perfectes que no són 3-contractives, per exemple l'àlgebra de Chang no és n-contractiva per cap n. En general tenim:

Teorema 140. *(1) La varietat generada per les cadenes n-contractives perfectes s'obté afegint als axiomes d'$\mathbb{IMTL}$, $x^{n-1} \approx x^n$ i:*

$$(\neg(\neg x)^2)^2 \approx \neg(\neg x^2)^2,$$

o

$$(x \wedge \neg x) \to (x \vee \neg x)^{n-1} \approx 1.$$

(2) La varietat generada per cadenes n-contractives perfectes amb punt fix afegit s'obté afegint:

$$x^{n-1} \approx x^n,$$

i

$$((x \wedge \neg x) \to (x \vee \neg x)^{n-1}) \vee (x \leftrightarrow \neg x) \approx 1.$$

7.3 Elements idempotents de les àlgebres n-contractives

En aquest darrer apartat estudiem el conjunt dels elements idempotents de les àlgebres n-contractives, descrivint el seu comportament respecte l'operació producte, donant una equació que permet comptar quants n'hi ha i examinant les classes arquimedianes que defineixen. Com que molts dels resultats que demostrem no necessiten la involució, els enunciarem en la seva màxima generalitat per a MTL-àlgebres.

Definició 141. *Sigui $\mathcal{A}$ una MTL-àlgebra. $Id(\mathcal{A})$ denotarà el conjunt dels seus elements idempotents. Notem que $0, 1 \in Id(\mathcal{A})$.*

Proposició 142. *Sigui $\mathcal{A}$ una MTL-àlgebra i $a \in Id(\mathcal{A})$. Aleshores per qualssevol $b, c \in A$,*

(1) Si $b, c \geq a$, llavors $b * c \geq a$.

(2) Si $b \geq a$, llavors $a * b = a$.

Prova: Si $b, c \geq a$, llavors $a = a * a \leq b * c$. Si $b \geq a$, llavors $a = a * a \leq a * b$, i l'altra desigualtat sempre és certa. $\square$

En el cas de les àlgebres n-contractives el conjunt dels idempotents queda caracteritzat de la següent manera:

Proposició 143. *Sigui $\mathcal{A}$ una MTL-àlgebra n-contractiva. Aleshores, $Id(\mathcal{A}) = \{a^{n-1} : a \in A\}$.*

Prova: Si $a \in A$ és idempotent, llavors $a = a^2 = \ldots = a^{n-1}$. Recíprocament, sigui $a \in A$ i considerem a^{n-1}. Aleshores, $a^{n-1} * a^{n-1} = a^n * a^{n-2} = a^{n-1} * a^{n-2} = \ldots = a^{n-1}$, i per tant $a^{n-1} \in Id(\mathcal{A})$. □

Corol·lari 144. *Sigui $\mathcal{A}$ una IMTL-àlgebra n-contractiva. Aleshores:*
$Rad(\mathcal{A}) = \{a \in A : a^{n-1} \in A_+\}$.

Corol·lari 145. *Sigui $\mathcal{A}$ una MTL-cadena n-contractiva. Aleshores, $\mathcal{A}$ és simple sii $Id(\mathcal{A}) = \{0, 1\}$.*

Definició 146. *Per cada $n \geq 3$ i $k \geq 2$, definim el següent terme:*
$I_k^n(x_0, \ldots, x_k) := \bigvee_{i<k}(x_i^{n-1} \to x_{i+1}^{n-1})$.

Proposició 147. *Per tot $n \geq 3$, tot $k \geq 2$ i tota MTL-cadena n-contractiva $\mathcal{A}$, són equivalents:*

(1) $\mathcal{A} \models I_k^n(x_0, \ldots, x_k) \approx 1$.

(2) $\mid Id(\mathcal{A}) \mid \leq k$.

Prova: Suposem que $\mid Id(\mathcal{A}) \mid > k$. Aleshores podem prendre $a_0, \ldots, a_k \in Id(\mathcal{A})$ tals que $a_0 > a_1 > \ldots > a_k$. Llavors per tot i, $a_i = a_i^{n-1}$ i $a_{i+1} = a_{i+1}^{n-1}$, o sia, $a_i^{n-1} \to a_{i+1}^{n-1} \neq 1$ i l'equació no es satisfà. Recíprocament, suposem que $\mid Id(\mathcal{A}) \mid \leq k$ i prenguem elements arbitraris $a_0, \ldots, a_k \in A$. En virtut de la proposició 143, $a_0^{n-1}, \ldots, a_k^{n-1} \in Id(\mathcal{A})$, i per tant existeixen $i < j \leq k$ tals que $a_i^{n-1} = a_j^{n-1}$. En conseqüència, hi ha un $l < k$ tal que $a_l^{n-1} \to a_{l+1}^{n-1} = 1$.
□

Corol·lari 148. *Per tota MTL-cadena n-contractiva, $I_2^n(x_0, x_1, x_2) \approx 1$ i $\neg x^{n-1} \vee x \approx 1$ són equacions equivalents.*

Proposició 149. *Sigui $\mathcal{A}$ una MTL-cadena n-contractiva amb un nombre finit d'idempotents. Aleshores, $Rad(\mathcal{A}) = \{b \in A \mid b \geq a\}$, on $a = min(Id(\mathcal{A}) \setminus \{0\})$.*

Prova: $b \in Rad(\mathcal{A}) \Leftrightarrow b^{n-1} \in A_+ \Leftrightarrow b^{n-1} \geq a \Leftrightarrow b \geq a$. □

Proposició 150. *Sigui $\mathcal{A}$ una MTL-cadena n-contractiva. Aleshores per qualssevol $a, b \in A$:*

(1) $a^{n-1} \leq b \leq a \Rightarrow b^{n-1} = a^{n-1}$.

(2) $b > a$ *i* $(a, b] \cap Id(\mathcal{A}) = \emptyset \Rightarrow b^{n-1} = a^{n-1}$.

(3) $a \leq b \Rightarrow a^{n-1} \leq a * b \leq a$.

Prova: És una comprovació senzilla. □

Arribats a aquest punt, seguint la terminologia de [33], serà útil definir el concepte de component arquimediana per a les MTL-cadenes.

Definició 151. *Donada una MTL-cadena $\mathcal{A}$ definim la següent relació binària: per a qualssevol $a, b \in A$ $a \sim b$ sii existeix un $n \geq 1$ tal que $a^n \leq b \leq a$ o $b^n \leq a \leq b$. Es demostra fàcilment que és una relació d'equivalència i s'anomena classes arquimedianes a les seves classes d'equivalència. Donat $a \in A$, I_a denotarà la classe arquimediana de a. Observem que si $\mathcal{A}$ és n-contractiva, llavors $I_a = \{b \in A : a^{n-1} = b^{n-1}\}$.*

Notem que si $\mathcal{A}$ és una MTL-cadena n-contractiva i $a \in A$, llavors $\langle I_a, * \rangle$ és un semigrup abelià arquimedià. Ara bé, en general I_a no és un subconjunt de A tancat per $\to$.

Segons hem explicat a [41], les cadenes donades per t-normes contínues (i en general totes aquelles que satisfan l'axioma de divisibilitat) admeten una representació en suma ordinal de les seves classes arquimedianes. Hem dit també que això no és cert en general per a les cadenes donades per una t-norma que només sigui contínua per l'esquerra (ni en general per aquelles que no satisfan la divisibilitat). És interessant examinar en quins casos es conserva la descomposició en suma ordinal de classes arquimedianes quan falla la divisibilitat.

Proposició 152. *Sigui $\mathcal{A}$ una MTL-cadena. Són equivalents:*

- *$\mathcal{A}$ és la suma ordinal de les seves classes arquimedianes.*
- *Totes les classes arquimedianes són tancades per $*$ i $\to$.*

Prova: Suposem que $\mathcal{A}$ és la suma ordinal de les seves classes arquimedianes. Sigui $x \in A$ i vegem que I_x és tancat per $\to$. Siguin $a, b \in I_x$, tals que $a < b$. $b \to a = \max\{c \in A : c * b \leq a\}$. Si $c > x$ i $c \notin I_x$, llavors $c * b = c \wedge b = b > a$. Per tant, $b \to a \in I_x$. Recíprocament, suposem que les classes arquimedianes són tancades per $*$ i $\to$, i prenguem $a < b$ en classes arquimedianes diferents. Cal veure que $a * b = a$. Suposem que és fals, o sia, que $a * b < a$. Sabem que $a * b \in I_a$ i, per tant, $a \to a * b \in I_a$. Però això és absurd, car $a \to a * b \geq b$. □

En el cas de les cadenes n-contractives, aquesta situació admet una descripció equacional:

Proposició 153. *Sigui $\mathcal{A}$ una MTL-cadena n-contractiva. Són equivalents:*

- *$\mathcal{A}$ és la suma ordinal de les seves classes arquimedianes.*
- $\mathcal{A} \models (y^{n-1} \to x) \vee (x \to x * y) \approx 1.$

  Anomenem (SO) aquesta equació.

Prova: Suposem que $\mathcal{A}$ és la suma ordinal de les seves classes arquimedianes i prenguem $a, b \in A$ arbitraris. Cal veure que l'equació es satisfà pels valors $x = a$ i $y = b$. Si $b^{n-1} \leq a$ ja estem; suposem doncs que $b^{n-1} > a$. Llavors, b pertany a una classe superior a la de a i per tant, $a * b = a$ i d'aquí $a \to a * b = 1$. Recíprocament, suposem ara que $\mathcal{A} \models (SO)$ i prenguem $a < b$ en classes arquimedianes diferents. $a < b^{n-1}$, per tant, $a \to a * b = 1$, o sia, $a * b = a$. □

Aquesta condició a més ens dóna una nova lògica amb completesa estàndard forta:

Teorema 154. *Sigui $n \leq 2$ un natural qualsevol i sigui L l'extensió axiomàtica de MTL obtinguda afegint les traduccions de (E_n) i (SO). Aleshores L té completesa estàndard forta respecte de la classe de les MTL-àlgebres definides per t-normes contínues per l'esquerra n-contractives que són suma ordinal de les seves classes arquimedianes.*

Prova: Ho demostrarem utilitzant el mètode de Jenei i Montagna ([32]) que hem descrit a [41]. Sigui $\mathcal{A}$ una L-cadena comptable i considerem la seva densificació al domini:

$X = \{\langle s, q\rangle : s \in A, s \neq 0^{\mathcal{A}}, q \in Q \cap (0, 1]\} \cup \{\langle 0^{\mathcal{A}}, 1\rangle\}$,

amb l'ordre lexicogràfic i l'operació:

$$\langle s, q\rangle \circ \langle s', q'\rangle := \begin{cases} min\{\langle s, q\rangle, \langle s', q'\rangle\} & \text{si } s * s' = min\{s, s'\} \\ \langle s * s', 1\rangle & \text{altrament.} \end{cases}$$

Siguin $\langle s, q\rangle, \langle s', q'\rangle \in X$ tals que $\langle s, q\rangle < \langle s', q'\rangle^{n-1}$ i vegem que $\langle s, q\rangle * \langle s', q'\rangle = \langle s, q\rangle$.

Tenim:

$$\langle s', q'\rangle^{n-1} = \begin{cases} min\{\langle s', q'\rangle & \text{si } (s')^2 = s' \\ \langle (s')^{n-1}, 1\rangle & \text{altrament.} \end{cases}$$

Per tant, $s \leq s'$. Si $s{*}s' = s$, ja hem acabat. Suposem doncs que $s{*}s' < s$. Si $s' * s' = s'$, llavors, com que $\mathcal{A}$ és suma ordinal, tenim $s * s' = s$, i això és absurd. Si $s' * s' \neq s'$, llavors $\langle s', q' \rangle^{n-1} = \langle (s')^{n-1}, 1 \rangle$, per tant $s \leq (s')^{n-1}$ i, d'aquí $s * s' = s$, altra vegada una contradicció.

Considerem ara la completació de l'operació a $[0,1]$: per cada $a, b \in [0,1]$, $a \otimes b := \sup\{q * p : q \leq \alpha, p \leq \beta, q, p \in Q\}$. Siguin $a, b \in [0,1]$ tals que $a \leq b^{n-1}$ i vegem que $a \otimes b = a$. És clar que $\sup\{q * p : q \leq a, p \leq b, q < p^{n-1}, q, p \in Q\} = a$, per tant és suficient provar que:

$\sup\{q * p : q \leq a, p \leq b, q, p \in Q\} = \sup\{q * p : q \leq a, p \leq b, q < p^{n-1}, q, p \in Q\}$.

És obvi que el segon membre de la igualtat és menor o igual que el primer. Vegem l'altra desigualtat. Suposem que $q \leq a, p \leq b$, $q, p \in Q$. Si $q < p^{n-1}$, ja estem. Si no, prenem $b \geq p' > p$ tal que $q < (p')^{n-1}$.

Per tant, la completació a $[0,1]$ també satisfà (SO) i això finalitza la prova. □

8 Futures investigacions

Els resultats exposats en aquesta memòria constitueixen tan sols uns primers passos vers el vast objectiu de descriure les varietats d'IMTL-àlgebres (o de MTL-àlgebres, en general), o sia, les extensions finitàries de la lògica IMTL (o la lògica MTL, en general). Per tant, resten molts aspectes per estudiar en aquest camp, alguns dels quals ens proposem atacar en un futur immediat; per exemple els següents:

- Comprovar quines de les varietats que hem definit són localment finites.
- Classificar les varietats generades per t-normes contínues per l'esquerra $3-$*contractives* que satisfan (SO).
- Estendre al cas no-involutiu l'estudi de $\mathbb{S}_4$ fet a [22].
- Aprofitant els teoremes pont, estudiar a $\mathbb{IMTL}$ aquelles propietats algebraiques amb importància lògica, per exemple: axiomatitzabilitat finita, amalgamació, *finite model property* i *finite embedding property*.
- Estendre a $\mathbb{MTL}$ l'estudi de les àlgebres perfectes, locals i bipartides, i les varietats que generen.
- Trobar algun tipus de teorema de representació en sumes ordinals per a les IMTL-àlgebres (o per a les MTL-àlgebres, en general.)

Referències

[1] R. Adillon and V. Verdú. On a contraction-less intuitionistic propositional logic with conjunction and fusion, *Studia Logica* 65 (2000) 11–30.

[2] R. Ambrosio and A. Lettieri. A classification of bipartite MV-algebras. *Math. Japonica* 38, No. 1 (1993), 111–117.

[3] L.P. Belluce, A. Di Nola and A. Lettieri. Local MV-algebras. *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) 42 (1993), 347–361.

[4] W. J. Blok and D. Pigozzi. Algebraizable logics, *Mem. Amer. Math. Soc.* 396, vol 77, 1989.

[5] S. Burris and H. P. Sankappanavar. *A course in Universal Algebra.* Springer Verlag, New York, 1981.

[6] C.C. Chang. Algebraic analysis of many valued logics, *Trans. Amer. Math. Soc.* 88 (1958), 456–490.

[7] C.C. Chang. A new proof of the completeness of the Łukasiewicz axioms, *Trans. Amer. Math. Soc.* 93 (1959), 74–80.

[8] A. Ciabattoni, F. Esteva and L. Godo. T-norm based logics with n-contraction, *Neural Network World* 5 (2002), 441–452.

[9] R. Cignoli, F. Esteva, L. Godo and A. Torrens. Basic Fuzzy Logic is the logic of continuous t-norms and their residua, *Soft Computing* 4 (2000) 106–112.

[10] R. Cignoli, I.M.L. D'Ottaviano and D. Mundici. *Álgebras das Lógicas de Łukasiewicz*, Coleçao CLE, UNICAMP, Campinas, 1995.

[11] R. P. Dilworth and M. Ward. Residuated Lattices, *Trans. Amer. Math.* 45 (1939) 335–354.

[12] A. Di Nola, F. Liguori and S. Sessa. Using maximal ideals in the classification of MV-algebras. *Portugaliae Mathematica* 50 (1993) 87–102.

[13] F. Esteva, J.Gispert, L. Godo and F. Montagna. On the standard and Rational Completeness of some Axiomatic extensions of Monoidal t-norm Based Logic, *Studia Logica* 71 (2002) 199–226.

[14] F. Esteva and L. Godo. Monoidal t-norm based Logic: Towards a logic for left-continuous t-norms, *Fuzzy Sets and Systems* 124 (2001) 271–288.

[15] F. Esteva, L. Godo, P. Hájek and F. Montagna. Hoops and Fuzzy Logic, *J. Logic Computat.*, Vol. 13 No. 4 (2003) 531–555.

[16] J. M. Font, R. Jansana and D. Pigozzi, A Survey of Abstract Algebraic Logic, *Studia Logica* 74 (2003) 13–97.

[17] J. M. Font, A. J. Rodríguez and A. Torrens. Wajsberg Algebras. *Stochastica* Vol. VIII, 1 (1984) 5–31.

[18] J. Gispert. *Estudi Algebraic de les Extensions dels Càlculs Multivalorats de Łukasiewicz*, Universitat de Barcelona, 1998 (Tesi doctoral).

[19] J. Gispert. Universal Classes of MV-chains with Applications to Many-valued Logics, *Math. Log. Quart.* 48 (2002) 4, 581–601.

[20] J. Gispert. Axiomatic extensions of the nilpotent minimum logic, *Reports on Mathematical Logic* 37 (2003) 113–123.

[21] J. Gispert and A. Torrens. Quasivarieties generated by simple MV-algebras, *Studia Logica* 61 (1998) 79–99.

[22] J. Gispert and A. Torrens. An approach to the variety $\mathbb{IMTL}(3)$.

[23] P. Hájek. *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Trends in Logic, vol.4 Kluwer, 1998.

[24] L. Hay. Axiomatization of the infinite-valued predicate calculus, *The Journal of Symbolic Logic* 28 (1963) 77–86.

[25] U. Höhle. Commutative, residuated l-monoids. In Höhle, U. and Klement. E.P. eds., *Non-Classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1995) 55–106.

[26] S. Jenei. New family of triangular norms via contrapositive symmetrization of residuated implications, *Fuzzy Sets and Systems* 110 (1999) 157–174.

[27] S. Jenei. Structure of left-continuous triangular norms with strong induced negations, (I) Rotation construction, *J. Appl. Non-Classical Logics* 10 (2000) 83–92.

[28] S. Jenei. A note on the ordinal sum theorem and its consequences for the construction of triangular norms, *Fuzzy Sets and Systems* 126 (2002) 199–205.

[29] S. Jenei. Structure of Girard monoids on $[0, 1]$, in: S. E. Rodabaugh, E. P. Klement (Eds.), *Topological and Algebraic Structures in Fuzzy Sets. A Handbook of Recent Developments in the Mathematics of Fuzzy Sets*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003, 277–308.

[30] S. Jenei. On the structure of rotation-invariant semigroups, *Archive for Mathematical Logic*, 42 (2003), 489-514.

[31] S. Jenei and F. Montagna. A proof of standard completeness for Esteva and Godo's logic MTL, *Studia Logica* 70 (2002) 183–192.

[32] S. Jenei and F. Montagna. A general method for constructing left-continuous t-norms, *Fuzzy Sets and Systems* 136 (2003) 263–282.

[33] E. Klement, P. Mesiar and R. Pap. *Archimedean components of triangular norms.* Technical Report FLLL-TR-0206, 2002.

[34] Y. Komori. Super Łukasiewicz propositional logics, *Nagoya Mathematical Journal*, 84 (1981) 119–133.

[35] T. Kowalski and H. Ono. Residuated lattices: An algebraic glimpse at logics without contraction (preliminary report), 2001.

[36] J. Łukasiewicz and A. Tarski. Untersuchungen über den Aussagenkalkül. *Comptes Rendus de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie*, cl. iii 23 (1930) 1–21.

[37] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*, Ed. Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1971.

[38] C. A. Meredith. The dependence of an axiom of Łukasiewicz, *Trans. A. M. S.* 87 (1958) 54.

[39] D. Mundici. Interpretation of AF C^*-algebras in Łukasiewicz Sentential Calculus, *J. Funct. Anal.* 65 (1986), 15–63.

[40] C. Noguera, F. Esteva and J. Gispert. Perfect and bipartite IMTL-algebras and disconnected rotations of basic semihoops, Submitted to *Archive for Mathematical Logic.*

[41] C. Noguera. *T-normes i Lògica Borrosa*. Treball de DEA, Universitat de Barcelona, 2004.

[42] A. J. Rodríguez, *Un estudio algebraico de los cálculos proposicionales de Łukasiewicz*, Universitat de Barcelona, 1980 (Tesi doctoral).

[43] A. J. Rodríguez, A. Torrens and V. Verdú. Łukasiewicz logic and Wajsberg algebras, *Bull. Sec. Log. Polish Ac. Sc.* 2 vol. 19 (1990) 51–55.

[44] A. Rose and J. B. Rosser. Fragments of many-valued statement calculi, *Trans. Amer. Math. Soc.* 87 (1958) 1–53.

[45] R. Wojcicki. On matrix representations of consequence operations of Łukasiewicz's sentential calculi, *Z. M. L.* 19 (1976) 239–247.

[46] L. A. Zadeh. Fuzzy sets, *Inform. Control* 8 (1965) 338–353.